國立臺灣海洋大學河海工程學系 2019 工程數學(二) 第二次大考

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. (1) 試解特徵問題: $y''+\lambda y=0$; $y'(0)=0$, $y'(2)=0$，請求出特徵值與特徵函數。 (8%)
   (2) 試說明何謂函數正交。 (3%)
   (3) 請問(1)所得之特徵函數在區間[0, 2]上是否正交 (須說明原因)。 (3%)

2. 已知函數 $f(x)=\cos^3 x$，試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(hint:尤拉公式) (8%)

3. 給一函數 $f(x)=\left|\sin(\frac{x}{2})\right|$
   (1) 請畫出函數 $f(x)$ 之圖形 $(-6\pi \le x \le 6\pi)$。(2%)
   (2) 試問此函數為奇函數或是偶函數? (2%) 週期 $T=$? (2%)
   (3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(8%)
   (4) 試求無窮級數 $\frac{-1}{4\times1^2-1}+\frac{1}{4\times2^2-1}+\frac{-1}{4\times3^2-1}+\frac{1}{4\times4^2-1}+\cdots$ 之值。(4%)

4. 已知某週期函數 $f(x)=\begin{cases}0, & 1\le|x|\le2\\ 2, & |x|<1\end{cases}$，$f(x)=f(x+4)$，試求 $f(x)$ 之複數型之傅立葉級數。(10%)

5 已知 $u(x-a)$ 為單位步階函數，即 $u(x-a)=\begin{cases}1, & x>a\\ 0, & x<a\end{cases}$ $(a>0)$
   (1) 請畫出 $p(x)=u(x+a)-u(x-a)$ 之圖形，並求其傅立葉轉換 $P(\omega)$。 (6%)
   (2) 請畫出 $q(x)=x[u(x+2)-u(x-2)]$ 之圖形，並求其傅立葉轉換 $Q(\omega)$。 (6%)
   (3) 已知函數 $g(x)=\begin{cases}0, & x<2 \ \ and \ \ x>6\\ 2, & 2\le x\le6\end{cases}$，試以單位步階函數來表示。 (2%)
   (4) 函數 $f(x-4)=g(x)$ 請畫出 $f(x)$ 之圖形，並求其傅立葉轉換 $F(\omega)$。 (6%)
   (5) 試求函數 $g(x)$ 傅立葉轉換 $G(\omega)$。 (4%)
   (6) 試求 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$。 (5%)
   (7) 試將微分方程 $y''(x)+6y'(x)+5y(x)=\delta(x-3)$ 作傅立葉轉換，並求 $Y(\omega)=$? 與 $y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=$? (8%)

6. (1) 試求 $f(x)=e^{-a|x|}$，其中 $a>0$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$ (5%)
   (2) 試求 $\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}]=$? (8%)

傅立葉級數展開

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx,\quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx,\quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}\,dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

傅立葉積分： $f(x) = \int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$

其中 $A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx,\quad B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x},\quad \text{其中 } \omega_n = \frac{2n\pi}{T},\quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$$

傅立葉轉換： $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$

Convolution : $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \mathcal{F}[f(t) * g(t)] = F(\omega)\cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)] = i^n \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$ 其中 $a < x_0 < b$

尤拉公式： $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)] = e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)] = F(\omega - \omega_0)$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\beta\sin\alpha$