國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(二) 期末考參考解答

系級：______________　　學號：____________　　姓名：___________

1. 試求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換為何? (16%)

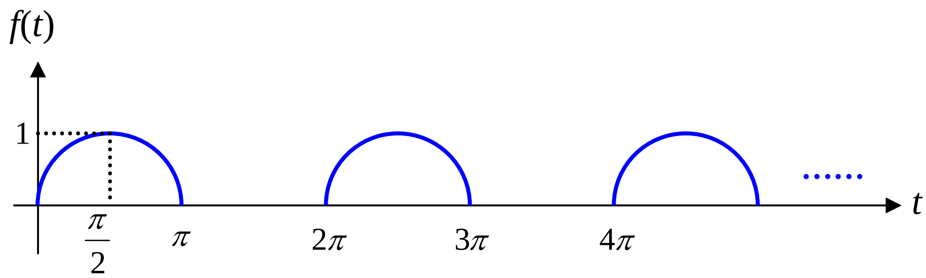
(1) $f(t)=(1+t)e^{2t}$ (2) $f(t)=\cosh t\cdot\sin 2t$ (3) $f(t)=t\sin 2t$ (4) $f(t)=\dfrac{1}{t}\sin t$

2. 試求下列 $F(s)$ 的拉普拉斯逆轉換為何? (32%)

(1) $F(s)=e^{-s}$ (2) $F(s)=\dfrac{3}{s}$ (3) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s-a)}$ (4) $F(s)=\dfrac{1}{(s-a)^3}$

(5) $F(s)=\dfrac{s^2+s}{s^2+4}$ (6) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+s}$ (7) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+10}$ (8) $F(s)=\ln\dfrac{s+1}{s-2}$

3. 請計算下圖函數 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換 $F(s)$。(10%)



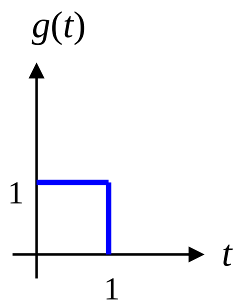
4. 單位步階函數(unit step function)定義為

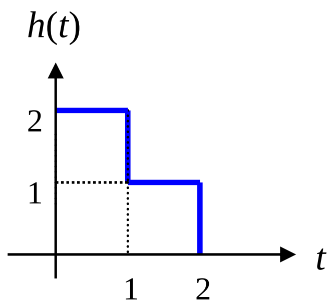
$$u(t-a)=\begin{cases}1, & t>a\\ 0, & t<a\end{cases}$$ 其中 a 為常數

(1) 試將下圖函數 $g(t)$ 與 $h(t)$ 以單位步階函數表示。 (6%)

(2) 試求 $g(t)$ 與 $h(t)$ 之拉普拉斯轉換 $G(s)$ 與 $H(s)$。 (6%)

(3) 已知 $F(s)=G(s)\cdot H(s)$ 又 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$，試求 $f(t)$ 並繪其圖形。 (10%)





5. 試以拉普拉斯轉換法求解下述微分方程式:

(1) $y''+4y'+5y=\delta(t-1)$； $y(0)=0$， $y'(0)=0$ (10%)

(2) $y''+y-4\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau=e^{-2t}$； $y(0)=1$， $y'(0)=0$ (10%)

6. 試求解下述聯立微分方程組 (10%)

$$\begin{cases}y_1'=5y_1+y_2\\ y_2'=y_1+5y_2\end{cases}$$ 且 $y_1(0)=1$ 與 $y_2(0)=-3$

7. 對工數的教學或學習有何感想? (5%) 對此門課有何建議? (5%)

參考公式

拉普拉斯轉換： $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$

第一平移定理: $\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$

第二平移定理: $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]=e^{-as}F(s)$

尺度變換: $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

微分函數的拉普拉斯轉換: $\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

$\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

積分函數的拉普拉斯轉換: $\mathcal{L}[\int_0^t f(x)\,dx]=\frac{F(s)}{s}$

$\mathcal{L}[\int_0^t\int_0^\tau f(x)\,dx\,d\tau\,]=\frac{F(s)}{s^2}$

拉普拉斯轉換的微分: $\mathcal{L}[tf(t)]=(-1)\frac{d}{ds}F(s)$

$\mathcal{L}[t^2f(t)]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)$

拉普拉斯轉換的積分: $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^\infty F(\tau)\,d\tau$

$\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t^2}]=\int_s^\infty\int_\gamma^\infty F(\tau)\,d\tau\,d\gamma$

摺積: $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$

$\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=F(s)\cdot G(s)$

雙曲函數: $\cosh at=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$

$\sinh at=\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$

初值定理: $\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$

終值定理: $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$

一階線性 **ODE:** $y'(x)+p(x)y(x)=q(x)$ 其積分因子為 $\mu=e^{\int p(x)dx}$

參考解答：

1. 試求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換為何? (16%)

(1) $f(t)=(1+t)e^{2t}$ **(2)** $f(t)=\cosh t\cdot\sin 2t$ **(3)** $f(t)=t\sin 2t$ **(4)** $f(t)=\frac{1}{t}\sin t$

(1) $f(t)=(1+t)e^{2t}$

$\therefore \mathcal{L}[1+t]=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \mathcal{L}[(1+t)e^{2t}]=\frac{1}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}$

(2) $f(t)=\cosh t\cdot\sin 2t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\sin 2t=\frac{1}{2}(e^t\sin 2t+^{-t}\sin 2t)$

又 $\mathcal{L}[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+2^2}=\frac{2}{s^2+4}$

$\Rightarrow \mathcal{L}[e^t\sin 2t]=\frac{2}{(s-1)^2+4}$ 與 $\mathcal{L}[e^{-2t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+1)^2+4}$

$\therefore \mathcal{L}[\cosh t\cdot\sin 2t]=\frac{1}{(s-1)^2+4}+\frac{1}{(s+1)^2+4}$

(3) $\mathcal{L}[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+4}$

$\therefore \mathcal{L}[t\sin 2t]=-\frac{d}{ds}(\frac{2}{s^2+4})=\frac{4s}{(s^2+4)^2}$

(4) $\mathcal{L}[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$

$\therefore \mathcal{L}[\frac{1}{t}\sin t]=\int_s^\infty \frac{1}{\tau^2+1}d\tau=\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}s=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}s$

2. 試求下列 $F(s)$ 的拉普拉斯逆轉換為何? (32%)

(1) $F(s)=e^{-s}$ (2) $F(s)=\frac{3}{s}$ (3) $F(s)=\frac{1}{s^2(s-3)}$ (4) $F(s)=\frac{1}{(s-3)^3}$

(5) $F(s)=\frac{s^2+s}{s^2+4}$ (6) $F(s)=\frac{1}{s^2+s}$ (7) $F(s)=\frac{1}{s^2+6s+10}$ (8) $F(s)=\ln\frac{s+1}{s-2}$

(1) $F(s)=e^{-s} \quad \Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}[e^{-s}]=\delta(t-1)$

(2) $F(s)=\frac{3}{s} \quad \Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s}]=3$

(3) $F(s)=\frac{1}{s^2(s-3)} \quad \Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}[-\frac{1}{4s}-\frac{1}{2s^2}+\frac{1}{4(s-2)}]=\frac{1}{4}(-1-2t+e^{2t})$

(4) $F(s)=\frac{1}{(s-3)^3} \quad \Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s-3)^3}]=e^{3t}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^3}]=\frac{1}{2}t^2e^{3t}$

(5) $F(s)=\dfrac{s^2+s}{s^2+4}$ $\quad\Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}[1+\dfrac{s}{s^2+4}-\dfrac{4}{s^2+4}]=\delta(t)+\cos 2t-2\sin 2t$

(6) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+s}=\dfrac{1}{s(s+1)}$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+1}]=e^{-t}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s+1)}]=\int_0^t e^{-x}dx=-e^{-t}+1$$

(7) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+10}=\dfrac{1}{(s+3)^2+1}$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+3)^2+1}]=e^{-3t}\cdot\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]=e^{-3t}\sin t$$

(8) $F(s)=\ln\dfrac{s+1}{s-2}=\ln(s+1)-\ln(s-2)$

$$\mathcal{L}[g(t)]=G(s)=\ln(s+1)$$

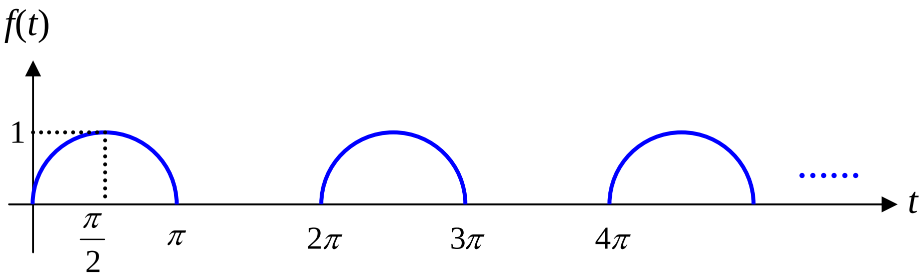
$$\mathcal{L}[t\cdot g(t)]=-\frac{d}{ds}G(s)=-\frac{1}{s+1}\qquad\Rightarrow t\cdot g(t)=-e^{-t}\qquad\Rightarrow g(t)=-\frac{1}{t}e^{-t}$$

$$\mathcal{L}[h(t)]=H(s)=\ln(s-2)$$

$$\mathcal{L}[t\cdot h(t)]=-\frac{d}{ds}H(s)=-\frac{1}{s-2}\qquad\Rightarrow t\cdot g(t)=-e^{-t}\qquad\Rightarrow g(t)=-\frac{1}{t}e^{2t}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=-\frac{1}{t}(e^{-t}-e^{2t})$$

3. **請計算下圖函數** $f(t)$ **的拉普拉斯轉換** $F(s)$ **。(10%)**



$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\le t\le\pi,\\ 0, & \pi\le t\le 2\pi,\end{cases}\quad\text{並且}\quad f(t)=f(t+2\pi)$$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\cdot\frac{e^{-\pi s}+1}{s^2+1}=\frac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$$

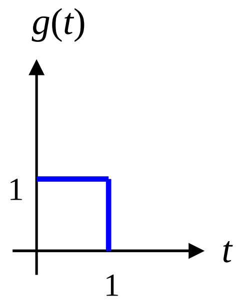
4. 單位步階函數(unit step function)定義為

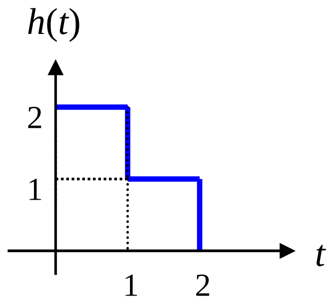
$$u(t-a)=\begin{cases}1, & t>a\\ 0, & t<a\end{cases}\qquad \text{其中 } \boldsymbol{a} \text{ 為常數}$$

(1) 試將下圖函數 $g(t)$ 與 $h(t)$ 以單位步階函數表示。 **(6%)**

(2) 試求 $g(t)$ 與 $h(t)$ 之拉普拉斯轉換 $G(s)$ 與 $H(s)$ 。 **(6%)**

(3) 已知 $F(s)=G(s)\cdot H(s)$ 又 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$，試求 $f(t)$ 並繪其圖形。 **(10%)**





(1) $g(t)=u(t)-u(t-1)$

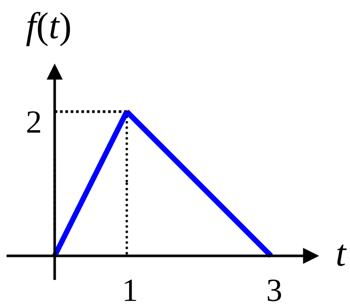
$h(t)=2[u(t)-u(t-1)]+[u(t-1)-u(t-2)]=2u(t)-u(t-1)-u(t-2)$

(2) $\mathcal{L}[g(t)]=G(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s}e^{-s}$

$\mathcal{L}[h(t)]=H(s)=\dfrac{2}{s}-\dfrac{1}{s}e^{-s}-\dfrac{1}{s}e^{-2s}$

(3) $F(s)=G(s)\cdot H(s)=\dfrac{1}{s^2}(2-3e^{-s}+e^{-3s})$

$\Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=g(t)*h(t)=2tu(t)-3(t-1)u(t-1)+(t-3)u(t-3)$



5. **試以拉普拉斯轉換法求解下述微分方程式:**

(1) $y''+4y'+5y=\delta(t-1)$；$y(0)=0$，$y'(0)=0$ **(10%)**

(2) $y''+y-4\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau=e^{-2t}$；$y(0)=1$，$y'(0)=0$ **(10%)**

(1) $\mathcal{L}[y''+4y'+5y]=\mathcal{L}[\delta(t-1)]$

$$\Rightarrow [s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+4[sY(s)-y(0)]+5Y(s)=e^{-s}$$

$$\Rightarrow (s^2+4s+5)Y(s)=e^{-s}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{e^{-s}}{(s+2)^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-s}}{(s+2)^2+1}]$$

又 $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+2)^2+1}]=e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]=e^{-2t}\sin t$

$$\therefore\quad y(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-s}}{(s+2)^2+1}]=e^{-2(t-1)}\sin(t-1)\cdot u(t-1)$$

(2) $\mathcal{L}[y''+y-4\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau]=\mathcal{L}[e^{-2t}]$

$$\Rightarrow [s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+Y(s)-4Y(s)\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{1}{s+2}$$

$$\Rightarrow \frac{s^4+2s^2-3}{s^2+1}Y(s)=\frac{s^2+2s+1}{s+2}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{(s^2+1)(s+1)^2}{(s^2+3)(s^2-1)(s+2)}=\frac{(s^2+1)(s+1)}{(s^2+3)(s-1)(s+2)}$$

$$=\frac{As+B}{s^2+3}+\frac{C}{s-1}+\frac{D}{s+2}$$

$$\Rightarrow (As+B)(s-1)(s+2)+C(s^2+3)(s+2)+D(s^2+3)(s-1)=(s^2+1)(s+1)$$

當 $s=1 \quad \Rightarrow C=\frac{1}{3}$

當 $s=-2 \quad \Rightarrow D=\frac{5}{21}$

當 $s=0 \quad \Rightarrow B=\frac{1}{7}$

比較 s^3 係數 $\quad \Rightarrow A=\frac{3}{7}$

$$\therefore \Rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{3s+1}{7(s^2+3)}+\frac{1}{3(s-1)}+\frac{5}{21(s+2)}]$$

$$=\frac{3}{7}\cos\sqrt{3}\,t+\frac{3}{7\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\,t+\frac{1}{3}e^{t}+\frac{5}{21}e^{-2t}$$

6. 試求解下述聯立微分方程組 (10%)

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 5y_2 \end{cases} \quad 且 \quad y_1(0) = 1 \quad 與 \quad y_2(0) = -3$$

$\mathcal{L}[y_1(t)] = Y_1(s)$ 與 $\mathcal{L}[y_2(t)] = Y_2(s)$

將聯立微分方程組 $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 5y_2 \end{cases}$ 做拉普拉斯轉換後可得

$$\begin{cases} sY_1(s) - y_1(0) = 5Y_1(s) + Y_2(s) \\ sY_2(s) - y_2(0) = Y_1(s) + 5Y_2(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s-5)Y_1(s) - Y_2(s) = 1 \\ -Y_1(s) + (s-5)Y_2(s) = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_1(s) = \frac{(s-5)-3}{(s-5)^2 - 1}, \quad Y_2(s) = \frac{-3(s-5)+1}{(s-5)^2 - 1}$$

由 $Y_1(s) = \dfrac{3s^3 + s^2 + 8s - 6}{s^2(s+1)(s-3)} = \dfrac{As+B}{s^2} + \dfrac{C}{s-3} + \dfrac{D}{s+1}$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)] = e^{5t}\mathcal{L}^{-1}[\frac{s-3}{s^2-1}] = e^{5t}(\cosh t - 3\sinh t) = \frac{e^{5t}}{2}(e^t + e^{-t} - 3e^t + 3e^{-t})$$
$$= 2e^{4t} - e^{6t}$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)] = e^{5t}\mathcal{L}^{-1}[\frac{-3s+1}{s^2-1}] = e^{5t}(-3\cosh t + \sinh t) = \frac{e^{5t}}{2}(-3e^t - 3e^{-t} + e^t - e^{-t})$$
$$= -2e^{4t} - e^{6t}$$