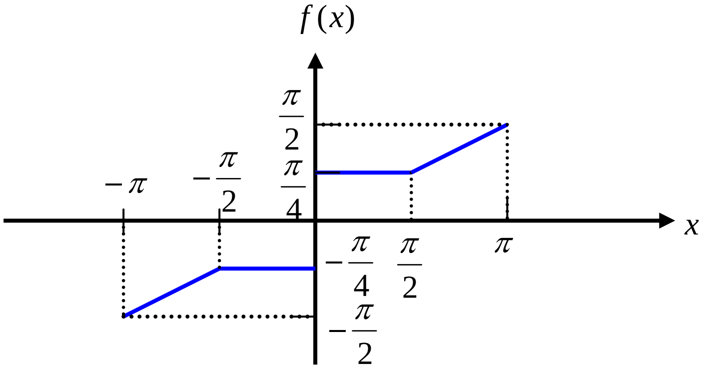
系級：______________　　學號：____________　　姓名：___________

1. 已知 $f(t)=\begin{cases}0, & -\pi<t<0\\ \sin 2t, & 0<t<\pi\end{cases}$

(1) 試將 $f(t)$ 展成傅立葉級數。(8%)　(2) 試將 $f(t)$ 展成傅立葉積分。(8%)

2. 給一週期函數如下圖所示，已知其週期為 2π，試求此函數 $f(x)$ 之傅立葉級數，並列出前三個係數(a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)之值為何? (12%)



3. 給一函數 $f(x)=-2x^2$ 其中 $-1<x<1$ 並且又有 $f(x+2n)=f(x)$，n 為正整數

(1) 請畫出函數 $f(x)$ 之圖形。(2%)

(2) 試問此函數為奇函數或是偶函數? (2%) 週期 $T=?$ (2%)

(3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(6%)

(4) 試問: $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots=?$ (5%)

(5) 試問: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=?$ (5%)

4. (1) 試求函數 $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t\le-1\\ 1+t, & -1<t\le 0\\ 1-t, & 0<t\le 1\\ 0, & 1<t<\infty\end{cases}$ 的傅立葉積分表示式。(8%)

(2) 試問 $\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (5%)

5. 已知函數 $f(x)=e^{-|x|}$ 與 $g(x)=H(x+1)-H(x-1)$，其中 $H(x)$ 為單位步階函數，其定義為 $H(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

(1) 試求： $f(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)=?$ (5%)

(2) 試求： $g(x)$ 之傅立葉轉換 $G(\omega)=?$ (5%)

(3) 試求： $\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (5%)

(4) 取 $q(x)=f(x)*g(x)$，試問： $q(x)=?$ (5%)
(hint： 分 $x<-1$, $-1<x<1$, $1<x$ 討論)

(5) $Q(\omega)=\mathcal{F}[q(x)]=?$ (5%)

6. (1) 試求 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$。 (6%)

(2) 試求 $H(\omega)=\dfrac{e^{-4\omega i}}{3+\omega i}$ 之傅立葉反轉換 $h(x)$。 (6%)

傅立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx,\ \ a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\ \ b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傅立葉積分： $f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx,\ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x},\quad 其中\ \omega_n=\frac{2n\pi}{T},\ c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$$

傅立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$

Convolution : $f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式： $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$

參考解答:

1. 已知 $f(t)=\begin{cases} 0, & -\pi<t<0 \\ \sin 2t, & 0<t<\pi \end{cases}$ (111 成大土木)

(1) 試將 $f(t)$ 展成傅立葉級數。 (8%)

(2) 試將 $f(t)$ 展成傅立葉積分。 (8%)

(1) 將 $f(t)$ 展成傅立葉級數，週期為 $T=2\pi$

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi t}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi t}{T}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nt$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\,dt=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\cdot\cos nt\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\sin(2+n)t+\sin(2-n)t]dt$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2+n}\cos(2+n)t\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2-n}\cos(2-n)t\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2[1-(-1)^n]}{\pi(4-n^2)}, & n\neq 2\\ 0, & n=2\end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\cdot\sin nt\,dt=\begin{cases}0, & n\neq 2\\ \dfrac{1}{2}, & n=2\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(t)=-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos t+\frac{1}{1\cdot 5}\cos 3t+\frac{1}{3\cdot 7}\cos 5t+\cdots\right)+\frac{1}{2}\sin 2t$$

(2) 將 $f(t)$ 展成傅立葉積分

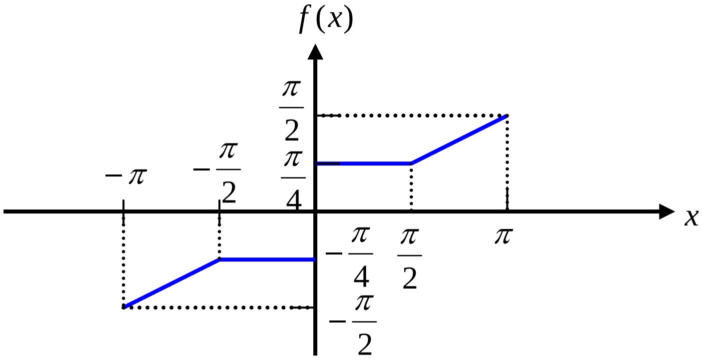
$$f(t)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\sin\omega t]dt$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\cdot\cos\omega t\,dt=\begin{cases}\dfrac{2[1-\cos\omega\pi]}{\pi(4-\omega^2)}, & \omega\neq 2\\ 0, & \omega=2\end{cases}$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\cdot\sin\omega t\,dt=\begin{cases}\dfrac{2\sin\omega\pi}{\pi(4-\omega^2)}, & \omega\neq 2\\ \dfrac{1}{2}, & \omega=2\end{cases}$$

2. 給一週期函數如下圖所示，已知其週期為2π，試求此函數$f(x)$之傅立葉級數，並列出前三個係數(a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)之值為何? (12%)

(110 陽明交大土木)



由圖可知此為奇函數，週期為$T=2\pi$且$a_0=a_n=0$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x}{2}\cdot\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4n}-\frac{\pi}{4n}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{n\pi}(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2-\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2\right]$$

$$=\frac{4}{n\pi}(1-\cos\frac{n\pi}{2})+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}(\sin n\pi-\sin\frac{n\pi}{2})$$

$$=\frac{4}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\therefore\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n\pi}-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2})\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$\therefore a_0=a_1=a_2=a_3=0,\ \ b_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{\pi},\ \ b_2=-\frac{1}{4},\ \ b_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{9\pi}$$

3. 給一函數 $f(x)=-2x^2$ 其中 $-1<x<1$ 並且又有 $f(x+2n)=f(x)$，n 為正整數

(1) 請畫出函數 $f(x)$ 之圖形。(2%)

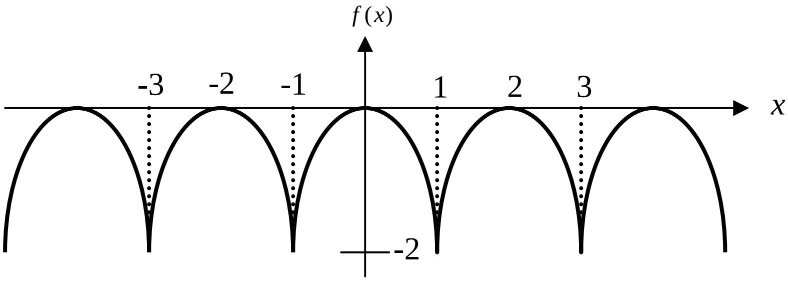
(2) 試問此函數為奇函數或是偶函數? (2%) 週期 $T=$? (2%)

(3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(6%)

(4) 試問: $1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}-\cdots=$? (5%)

(5) 試問: $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots=$? (5%)

(1)



(2) 偶函數，$T=2$

(3) $$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx=\int_0^1(-2x^2)\,dx=-\frac{2}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx=\int_{-1}^{1}f(x)\cdot\cos n\pi x\,dx$$

$$=2\int_0^1(-2x^2)\cdot\cos n\pi x\,dx=\frac{8(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$$

$$\therefore\quad f(x)=-\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

(4) 當 $x=0$ 時，$0=-\dfrac{2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

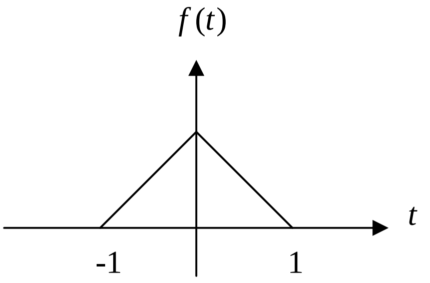
(5) 當 $x=1$ 時，$-2=-\dfrac{2}{3}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

4. (1) 試求函數 $f(t)=\begin{cases} 0, & -\infty<t\le -1 \\ 1+t, & -1<t\le 0 \\ 1-t, & 0<t\le 1 \\ 0, & 1<t<\infty \end{cases}$ 的傅立葉積分表示式。(8%)

(2) 試問 $\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (5%)

(1)



$\because$ 由圖可知此為偶函數

$\therefore \quad f(t)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t\, d\omega \qquad (B(\omega)=0)$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-t)\cos\omega t\, dt$$

$$=\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$$

$$\therefore \quad f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1-\cos\omega)\cos\omega t}{\omega^2}d\omega$$

(2) $f(0)=1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega}{\omega^2}d\omega \quad \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1-\cos\omega}{\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}$

5. 已知函數 $f(x)=e^{-|x|}$ 與 $g(x)=H(x+1)-H(x-1)$，其中 $H(x)$ 為單位步階函數，其定義為 $H(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

(1) 試求： $f(x)$ 之傳立葉轉換 $F(\omega)=?$ (5%)

(2) 試求： $g(x)$ 之傳立葉轉換 $G(\omega)=?$ (5%)

(3) 試求： $\int_{\infty}^{-\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (5%)

(4) 取 $q(x)=f(x)*g(x)$，試問： $q(x)=?$ (5%)

(hint： 分 $x<-1$, $-1<x<1$, $1<x$ 討論)

(5) $Q(\omega)=\mathcal{F}[q(x)]=?$ (5%)

(1) $\because f(x)=e^{-|x|}$ 為偶函數

$$\mathcal{F}[f(x)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}e^{-i\omega x}\,dx$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-x}\cos\omega x\,dx$$

$\therefore$

$$=\frac{2}{1+\omega^2}(-e^{-x}\cos\omega x+\omega e^{-x}\sin\omega x)\Big|_0^{\infty}$$

$$=\frac{2}{1+\omega^2}$$

(2) $\because g(x)=H(x+1)-H(x-1)$ 為偶函數

$$\mathcal{F}[g(x)]=G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[H(x+1)-H(x-1)]e^{-i\omega x}\,dx$$

$$=2\int_0^1\cos\omega x\,dx$$

$$=\frac{2}{\omega}\sin\omega$$

(3) 傳立葉轉換的 Parseval 恆等式可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(x+1)-H(x-1)\right|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2}{\omega}\sin\omega\right|^2d\omega$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{1}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\omega^2}\sin^2\omega\,d\omega$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}d\omega=\pi$$

(4) $q(x) = f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)\,d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\tau|}[H(\tau+1) - H(\tau-1)]\,d\tau$$
$$= \int_{-1}^{1} e^{-|x-\tau|}\,d\tau$$

當 $x > 1$ 時 $q(x) = \int_{-1}^{1} e^{-|x-\tau|}\,d\tau = \int_{-1}^{1} e^{-x+\tau}\,d\tau = e^{-x+1} - e^{-x-1}$

當 $x < 1$ 時 $q(x) = \int_{-1}^{1} e^{-|x-\tau|}\,d\tau = \int_{-1}^{1} e^{x-\tau}\,d\tau = -e^{x-1} + e^{x+1}$

當 $-1 < x < 1$ 時

$$q(x) = \int_{-1}^{1} e^{-|x-\tau|}\,d\tau = \int_{-1}^{x} e^{-x+\tau}\,d\tau + \int_{x}^{1} e^{x-\tau}\,d\tau$$
$$= (1 - e^{-x-1}) - (e^{x-1} - 1)$$
$$= 2 - e^{-x-1} - e^{x-1}$$

(5) $Q(\omega) = \mathcal{F}[q(x)] = F(\omega)G(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2} \cdot \dfrac{2}{\omega} \sin\omega x = \dfrac{4}{\omega(1+\omega^2)} \sin\omega$

6. (1) 試求 $f(x) = e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a > 0$。 (6%)

(2) 試求 $H(\omega) = \dfrac{e^{-4\omega i}}{3+\omega i}$ 之傅立葉反轉換 $h(x)$。 (6%)

(1) $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}u(x)e^{-i\omega x}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)x}dx$

$$= -\frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega}$$

(2) 由平移定理可知 $\mathcal{F}[f(x-T)] = e^{-i\omega T}F(\omega)$

又由(2)之結果可知 $\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{1}{3+\omega i}] = e^{-3x}u(x)$

$\therefore \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[\dfrac{e^{-4\omega i}}{3+\omega i}] = e^{-3(x-4)}u(x-4)$