

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 已知 $|\vec{A}| = 3, |\vec{B}| = 2$ 且 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 的夾角為 $\frac{2\pi}{3}$ ，試問： $|(2\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} + 2\vec{B})| = ?$
(10%)
2. 已知三點 $A(5,2,0), B(2,5,0), C(1,2,4)$ ，試求：
 - (1) $\triangle ABC$ 面積 S 。(3%)
 - (2) $A、B、C$ 與原點 $O(0,0,0)$ 所構成之四面體體積 V 。(3%)
 - (3) 原點 O 到 $\triangle ABC$ 所在平面的距離 h 。(3%)
3. 給定函數 $f(x,y) = e^{xy} \cos(x+y)$ 及點 $P(x,y) = (0,\pi)$ ，請回答下列問題：
 - (1) 請計算 f 在 P 處的最大變化率。(5%)
 - (2) 請找出沿著什麼方向， f 在 P 處的變化率會是上述最大變化率的一半。
(5%)
4. 給定純量場 $g = e^{x^2+y^2+z^2}$ 與向量場 $\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ ，試求：
 - (1) $\nabla \cdot (g\vec{v})$ (2) $\nabla^2 g$ (3) $\nabla \times (\nabla g)$ (4) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})$ (5) $\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v})$ (20%)
5. 試計算積分 $\int_C (10x^4 - 2xy^3)dx - 3x^2y^2dy$ ，其中路徑 C 為由點 $P(0,0)$ 出發經由 $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$ 到點 $Q(2,1)$ 。(10%)
6. 給一心臟線 $\vec{r}(t) = (\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t)$ ，其中 $\rho(t) = a(1 - \cos t)$ 且 $0 \leq t \leq 2\pi$
 - (1) 試計算心臟線之周長。(5%)
 - (2) 試以格林定理： $\oint f dx + g dy = \iint (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) dx dy$ ，給定 $f = -y$ 與 $g = x$ 來求
心臟線之面積。(5%)
 - (3) 試求在點 $(-2a,0)$ 之曲率 κ 。(5%)
7. 已知場 $\vec{F} = y\vec{i} + (y-x)\vec{j} + z^2\vec{k}$ ，曲面 S_1 為 $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25, z \geq 4$ 之部分
與 $S_2: z = 4$ ， Γ 為 $S_1、S_2$ 之交線，試問：
 - (1) 試畫出 S_1 之圖形，並標出 $S_1、S_2$ 與 Γ 。(4%)
 - (2) $\vec{F}$ 是否為保守場？請說明之。(2%)
 - (3) S_1 上的單位法向量 $\vec{n} = ?$ (4%)
 - (4) $\oiint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = ?$ (4%)
 - (5) $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ (4%)
 - (6) $\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA = ?$ (4%)
 - (7) $\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA = ?$ (4%)

Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla \cdot \vec{F} \, dV = \oint \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA$ (3D) $\iint \nabla \cdot \vec{F} \, dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$ (2D)

格林定理: $\int P \, dx + Q \, dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

Stokes 旋度定理: $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

曲率: $\kappa = \frac{|y''(x)|}{[1 + (y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率:** $\tau = \left| \frac{d(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}{ds} \right|$

二倍角公式: $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

四面體體積: $V = \frac{1}{3} A_0 h$, **圓錐體體積:** $V = \frac{1}{3} A_0 h$ (A_0 : 底面積; h : 高)

球座標: $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$

微小球面面積 $dA = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$ (θ : 俯仰角; ϕ : 水平角)

Lagrange 恆等式: $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(\vec{A} \cdot \vec{A})(\vec{B} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2}$