國立臺灣海洋大學河海工程學系 2025 工程數學(二) 第一次大考參考解答

系級：______________　　學號：____________　　姓名：___________

1. 已知 $\left|\vec{A}\right| = 3, \left|\vec{B}\right| = 2$ 且 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 的夾角為 $\dfrac{2\pi}{3}$，試問: $\left|(2\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}+2\vec{B})\right| = ?$

(10%)

2. 已知三點 $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$, $C(1,2,4)$，試求:
   (1) ΔABC 面積 S。 (3%)
   (2) A 、B 、C 與原點 $O(0,0,0)$ 所構成之四面體體積 V。 (3%)
   (3) 原點 O 到 ΔABC 所在平面的距離 h。 (3%)
3. 給定函數 $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$ 及點 $P(x,y) = (0,\pi)$，請回答下列問題:
   (1) 請計算 f 在 P 處的最大變化率。(5%)
   (2) 請找出沿著什麼方向，f 在 P 處的變化率會是上述最大變化率的一半。

(5%)

4. 給定純量場 $g = e^{x^2+y^2+z^2}$ 與向量場 $\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$，試求:
   (1) $\nabla\cdot(g\vec{v})$ (2) $\nabla^2 g$ (3) $\nabla\times(\nabla g)$ (4) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v})$ (5) $\nabla(\vec{v}\cdot\vec{v})$ (20%)
5. 試計算積分 $\int_C (10x^4 - 2xy^3)\,dx - 3x^2y^2dy$，其中路徑 C 為由點 $P(0,0)$ 出發經由 $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$ 到點 $Q(2,1)$。 (10%)
6. 給一心臟線 $\vec{r}(t) = (\rho(t)\cos t,\ \rho(t)\sin t)$，其中 $\rho(t) = a(1-\cos t)$ 且 $0 \le t \le 2\pi$
   (1) 試計算心臟線之周長。 (5%)
   (2) 試以格林定理: $\oint fdx + gdy = \iint (\dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y})dxdy$，給定 $f = -y$ 與 $g = x$ 來求心臟線之面積。 (5%)
   (3) 試求在點 $(-2a,0)$ 之曲率 κ。 (5%)
7. 已知場 $\vec{F} = y\vec{i} + (y-x)\vec{j} + z^2\vec{k}$，曲面 S_1 為 $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25,\ z \ge 4$ 之部分與 $S_2: z = 4$，Γ 為 S_1 、S_2 之交線，試問:
   (1) 試畫出 S_1 之圖形，並標出 S_1 、S_2 與 Γ。 (4%)
   (2) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (2%)
   (3) S_1 上的單位法向量 $\vec{n} = ?$ (4%)
   (4) $\oiint (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\, dS = ?$ (4%)
   (5) $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = ?$ (4%)
   (6) $\iint_{S_1} (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\, dA = ?$ (4%)
   (7) $\iint_{S_2} (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\, dA = ?$ (4%)

Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla\cdot\vec{F}\,dV = \oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$ **(3D)** $\iint \nabla\cdot\vec{F}\,dA = \oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ **(2D)**

格林定理: $\int P\,dx + Q\,dy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$

曲率: $\kappa = \frac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率:** $\tau = \left|\frac{d(\vec{T}(s)\times\vec{N}(s))}{ds}\right|$

二倍角公式: $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$**,** $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

四面體體積: $V = \frac{1}{3}A_0 h$**, 圓錐體積體積:** $V = \frac{1}{3}A_0 h$ **(** A_0**: 底面積;** h**: 高)**

球座標: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$**,** $z = r\cos\theta$

微小球面面積 $dA = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$ **(**θ**:俯仰角;** ϕ**:水平角)**

Lagrange 恆等式: $|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{(\vec{A}\cdot\vec{A})(\vec{B}\cdot\vec{B}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2}$

[參考解答]

1. 已知 $|\vec{A}|=3$, $|\vec{B}|=2$ 且 $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 的夾角為 $\frac{2\pi}{3}$ ，試問： $|(2\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}+2\vec{B})|=?$

(10%)

$$|(2\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}+2\vec{B})|=|2\vec{A}\times\vec{A}+4\vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{A}+2\vec{B}\times\vec{B}|$$

$$=3|\vec{A}\times\vec{B}|$$

$$=3\sqrt{|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2-(|\vec{A}||\vec{B}|\cos\frac{2\pi}{3})^2}=3\sqrt{36-9}=9\sqrt{3}$$

2. 已知三點 $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$, $C(1,2,4)$ ，試求：

(1) ΔABC 面積 ***S***。 **(3%)**

(2) A 、 B 、 C 與原點 $O(0,0,0)$ 所構成之四面體體積 ***V***。 **(3%)**

(3) 原點 **O** 到 ΔABC 所在平面的距離 ***h***。 **(3%)**

(1) $\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-4,0,4)$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=6\sqrt{3}$$

(2) $\overrightarrow{OA}=(5,2,0)$, $\overrightarrow{OB}=(2,5,0)$, $\overrightarrow{OC}=(1,2,4)$

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC})\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}5&2&0\\2&5&0\\1&2&4\end{vmatrix}\right|=14$$

(3) $V=\frac{1}{3}Sh\Rightarrow h=\frac{3V}{S}=\frac{7}{\sqrt{3}}$

另解： $\vec{n}=\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

$\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ 或 $\overrightarrow{OC}$ 投影到 $\vec{n}$ 上的長度即為 h

$$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{n}=\frac{7}{\sqrt{3}}$$

3. **給定函數** $f(x,y)=e^{xy}\cos(x+y)$ **及點** $P(x,y)=(0,\pi)$ **，請回答下列問題:**

(1) 請計算 f **在** P **處的最大變化率。(5%)**

(2) 請找出沿著什麼方向， f **在** P **處的變化率會是上述最大變化率的一半。**

(5%) (113 台大土木)

(1) $f(x,y)=e^{xy}\cos(x+y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy}\cos(x+y)-e^{xy}\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy}\cos(x+y)-e^{xy}\sin(x+y)$$

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

$$=e^{xy}[y\cos(x+y)-\sin(x+y)]\vec{i}+e^{xy}[x\cos(x+y)-\sin(x+y)]\vec{j}$$

在點點 $P(x,y)=(0,\pi)$

$$\nabla f=e^{0}[\pi\cos(\pi)-\sin(\pi)]\vec{i}+[0\cdot\cos(\pi)-\sin(\pi)]=-\pi\vec{i}$$

在 P 處的最大變化率為 $|\nabla f|=\pi$ ，方向為 $\dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}=-\vec{i}$

(2) 設沿 u 方向的單位向量為 $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}$

$$\frac{df}{du}=\nabla f\cdot\vec{u}=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow(-\pi\vec{i})\cdot(u_1\vec{i}+u_2\vec{j})=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow u_1=-\frac{1}{2}$$

又 $\sqrt{u_1^2+u_2^2}=1\quad\Rightarrow u_2=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 沿 $\vec{u}=-\dfrac{1}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ 或 $\vec{u}=-\dfrac{1}{2}\vec{i}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ 方向，變化率為最大變化率的一半

4. **給定純量場** $g = e^{x^2+y^2+z^2}$ **與向量場** $\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ **，試求： (113 成大土木)**

(1) $\nabla \cdot (g\vec{v})$ **(2)** $\nabla^2 g$ **(3)** $\nabla \times (\nabla g)$ **(4)** $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})$ **(5)** $\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v})$ **(20%)**

(1) $\nabla g = \dfrac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\vec{k} = e^{x^2+y^2+z^2}(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k})$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0$$

$$\nabla \cdot (g\vec{v}) = \nabla g \cdot \vec{v} + g(\nabla \cdot \vec{v})$$

$$= e^{x^2+y^2+z^2}(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}) \cdot (yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})$$

$$= 6xyze^{x^2+y^2+z^2}$$

(2) $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial(2xe^{x^2+y^2+z^2})}{\partial x} = 2e^{x^2+y^2+z^2} + 4x^2e^{x^2+y^2+z^2} = e^{x^2+y^2+z^2}(2 + 4x^2)$$

$$\nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

$$= e^{x^2+y^2+z^2}(1 + 2x^2) + 2e^{x^2+y^2+z^2}(1 + 2y^2) + 2e^{x^2+y^2+z^2}(1 + 2z^2)$$

$$= e^{x^2+y^2+z^2}(4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6)$$

(3) $\nabla \times (\nabla g) = 0$ (任何梯度場必不具備旋轉性)

(4) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$ (任何旋轉場也不具備發散性)

(5) $\vec{v} \cdot \vec{v} = y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2$

$$\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2)$$

$$= (2xz^2 + 2xy^2)\vec{i} + (2yz^2 + 2x^2y)\vec{j} + (2x^2z + 2y^2z)\vec{k}$$

5. **試計算積分** $\int_C (10x^4-2xy^3)\,dx-3x^2y^2dy$ **，其中路徑** $\boldsymbol{C}$ **為由點** $\boldsymbol{P}(0,0)$ **出發經由** $x^4-6xy^3=4y^2$ **到點** $\boldsymbol{Q}(2,1)$ **。 (10%)**

由於路徑 C 頗為複雜，故可先檢查是否為保守場

$$\vec{F}=P(x,y)\,\vec{i}+Q(x,y)\,\vec{j}=(10x^4-2xy^3)\,\vec{i}+(-3x^2y^2)\,\vec{j}$$

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 10x^4-2xy^3 & -3x^2y^2 & 0\end{vmatrix}=[-6xy^2-(-6xy^2)]\vec{k}=0$$

$\therefore\ \vec{F}$ 為保守場且存在純量函數 ϕ，使得 $\vec{F}=\nabla\phi$

且 $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 積分結果與路徑無關，只與起點終點有關

故可得 $P(x,y)=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=10x^4-2xy^3 \quad\Rightarrow \phi=2x^5-x^2y^3+h_1(y)$

$$Q(x,y)=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-3x^2y^2 \quad\Rightarrow \phi=-x^2y^3+h_2(x)$$

比較後可得 $\phi(x,y)=2x^5-x^2y^3+C$

$$\int_C (10x^4-2xy^3)\,dx-3x^2y^2dy=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\phi(2,1)-\phi(0,0)=64-4=60$$

6. 給一心臟線 $\vec{r}(t)=(\rho(t)\cos t,\,\rho(t)\sin t)$，其中 $\rho(t)=a(1-\cos t)$ 且 $0\le t\le 2\pi$

(1) 試計算心臟線之周長。 **(5%)**

(2) 試以格林定理: $\oint f dx+g dy=\iint(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy$，給定 $f=-y$ 與 $g=x$ 來求心臟線之面積。 **(5%)**

(3) 試求在點 $(-2a,0)$ 之曲率 κ。 **(5%)**

(1) $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=\rho(t)\cos t\,\vec{i}+\rho(t)\sin t\,\vec{j}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=a(1-\cos t)\cos t\\ y=a(1-\cos t)\sin t\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a(-\sin t+\sin 2t)\\ \dfrac{dy}{dt}=a(\cos t-\cos 2t)\end{cases}$$

$$S=\int ds=\int|d\vec{r}|=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{(-\sin t+\sin 2t)^2+(\cos t-\cos 2t)^2}\,dt$$

$$=2\sqrt{2}\,a\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin t\cdot\sin 2t-\cos t\cdot\cos 2t}\,dt$$

$$=2\sqrt{2}\,a\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$$=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$=8a$$

(2) $\oint -ydx+xdy=2\iint dxdy=2A$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\oint -ydx+xdy$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)(\sin^2 t-\sin t\cdot\sin 2t+\cos^2 t-\cos t\cdot\cos 2t)dt$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)^2 dt$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})\,dt$$

$$=\frac{3}{2}\pi a^2$$

(3) $\kappa = \dfrac{\left|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right|}{[\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}\,'(t)]^{\frac{3}{2}}}$

$\vec{r}\,'(t) = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$\vec{r}\,''(t) = x''\vec{i} + y''\vec{j}$

$$\kappa = \frac{\left|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right|}{[\vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}\,'(t)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left|x'y''-x''y'\right|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = a(1-\cos t)\cos t \quad \Rightarrow x' = \frac{dx}{dt} = a(-\sin t + \sin 2t)$$

$$\Rightarrow x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = a(-\cos t + 2\cos 2t)$$

$$y = a(1-\cos t)\sin t \quad \Rightarrow y' = \frac{dy}{dt} = a(\cos t - \cos 2t)$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = a(-\sin t + 2\sin 2t)$$

$$\kappa = \frac{\left|x'y''-x''y'\right|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{3a^2(1-\cos t)}{a^3[2(1-\cos t)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}\,a\cdot\sqrt{(1-\cos t)}}$$

將點 $(-2a,0)$ 即 $t=\pi$ 代入，可得 $\kappa = \dfrac{3}{4a}$

7. 已知場 $\vec{F} = y\vec{i} + (y-x)\vec{j} + z^2\vec{k}$，曲面 S_1 為 $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25,\ z \ge 4$ 之部分與 $S_2 : z = 4$，Γ 為 S_1、S_2 之交線，試問:

(1) 試畫出 S_1 之圖形，並標出 S_1、S_2 與 Γ。 (4%)

(2) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (2%)

(3) S_1 上的單位法向量 $\vec{n} = ?$ (4%)

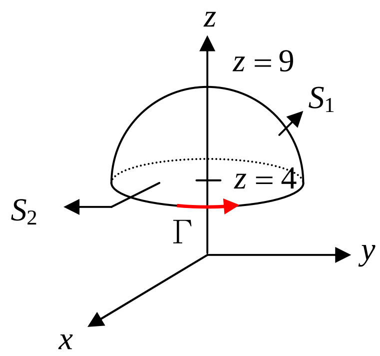
(4) $\oiint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = ?$ (4%)

(5) $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ (4%)

(6) $\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ (4%)

(7) $\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ (4%)

(1)



(2) $\because\ \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & y-x & z^2 \end{vmatrix} = -2\vec{k} \ne 0$

$\therefore$ $\vec{F}$ 不為保守場

(3) 令 $\phi = x^2 + y^2 + (z-4)^2 - 25$

$$\vec{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2(z-4)\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4(z-4)^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + (z-4)\vec{k}}{5}$$

(4) Gauss 散度定理: $\oiint \vec{P} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint \nabla \cdot \vec{P}\, dV$

令 $\vec{P} = \nabla \times \vec{F} \quad \Rightarrow \nabla \cdot \vec{P} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ ($\because$任何旋轉場不具有發散性)

因此 $\oiint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = 0$

(5) 由線積分 $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} y\,dx + (y-x)\,dy + z^2\,dz$

令 $x = 5\cos\theta$, $y = 5\sin\theta$, $z = 4$

$\Rightarrow dx = -5\sin\theta\,d\theta$, $dy = 5\cos\theta\,d\theta$, $dz = 0$

$$\therefore \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} y\,dx + (y-x)\,dy + z^2\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} [5\sin\theta \cdot (-5\sin\theta) + (5\sin\theta - 5\cos\theta)\cdot(5\cos\theta)]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} [5\sin\theta \cdot (-5\sin\theta) + (5\sin\theta - 5\cos\theta)\cdot(5\cos\theta)]d\theta$$

$$= -50\pi$$

(6) $\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -50\pi$

(7) $\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = -\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 50\pi$