'國立臺灣海洋大學河海工程學系 2025 工程數學(二) 第二次大考

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 試繪出下述函數圖形，並問是否為週期函數，若是請說出其週期為何? (10%)

   (1) $f(x)=|\sin x|$ (2) $f(x)=\sin|x|$

2. 試判定下列函數那些是奇函數，那些是偶函數，那些是非奇非偶函數? (12%)
   （請說明判斷理由，無說明者不給分）

   (1) $f(x)=x\sin x+1$ (2) $f(x)=x\sin^2 x+1$

   (3) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}, |x|<1$ (4) $f(x)=\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}, |x|<1$

3. 給一週期函數 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<\pi \\ \pi, & \pi<x<2\pi \end{cases}$，且其週期 $T=2\pi$

   (1) 試繪出函數 $f(x)$ 之圖形。(2%)
   (2) 試問此函數為奇函數、偶函數或是非奇非偶函數? (2%)
   (3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(8%)
   (4) 試問: $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots=?$ (4%)
   (5) 試問: $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{9^2}+\cdots=?$ (4%)

4. 已知函數 $f(x)=\begin{cases} h(1-\dfrac{|x|}{a}), & |x|\le a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$，其中 h 與 a 均為常數。

   (1) 試繪出 $f(x)$ 的圖形。(3%)
   (2) 試求 $f(x)$ 的傅立葉積分表示式。(7%)
   (3) 試問: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega a}{\omega^2}d\omega=?$ (3%)

5. 已知函數 $f(x)=|\sin x|, -\infty<x<\infty$，試求 $f(x)$ 的複數形式傅立葉級數。 (10%)

6. 已知 $F(\omega)=\mathcal{F}[e^{-a|x|}]=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$ 其中 $a>0$，試求下列函數之傅立葉轉換。

   (1) $p(x)=e^{-a|x|}\cos bx$。(5%) (2) $q(x)=x^2e^{-a|x|}$。(5%)

7. 已知函數 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{1}{a+i\omega}$，其中 $u(x)$ 為單位步階函數且 $a>0$。

   (1) $P(\omega)=\dfrac{1}{3+7i\omega-2\omega^2}$，試問:其傅立葉逆轉換 $p(x)=?$ (5%)
   (2) $2y''(x)+7y'(x)+3y(x)=\delta(x-2)$，試問: $Y(\omega)$ 與 $y(x)$ 為何? (10%)

8. 試求 $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}]=?$ (10%)

傅立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傅立葉積分： $f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx,\quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}$， 其中 $\omega_n=\frac{2n\pi}{T}$， $c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$

傅立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$

Convolution : $f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad\Rightarrow \mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式： $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$， $\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$