'國立臺灣海洋大學河海工程學系 2025 工程數學(二) 第二次大考參考解答

系級：______________　　學號：____________　　姓名：___________

1. 試繪出下述函數圖形，並問是否為週期函數，若是請說出其週期為何? (10%)

   (1) $f(x)=\left|\sin x\right|$　(2) $f(x)=\sin\left|x\right|$

2. 試判定下列函數那些是奇函數，那些是偶函數，那些是非奇非偶函數? (12%)（請說明判斷理由，無說明者不給分）

   (1) $f(x)=x\sin x+1$　(2) $f(x)=x\sin^2 x+1$

   (3) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}, \left|x\right|<1$　(4) $f(x)=\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}, \left|x\right|<1$

3. 給一週期函數 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<\pi \\ \pi, & \pi<x<2\pi \end{cases}$，且其週期 $T=2\pi$

   (1) 試繪出函數 $f(x)$ 之圖形。(2%)
   (2) 試問此函數為奇函數、偶函數或是非奇非偶函數? (2%)
   (3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(8%)
   (4) 試問: $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots=?$ (4%)
   (5) 試問: $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{9^2}+\cdots=?$ (4%)

4. 已知函數 $f(x)=\begin{cases} h(1-\dfrac{\left|x\right|}{a}), & \left|x\right|\le a \\ 0, & \left|x\right|>a \end{cases}$，其中 h 與 a 均為常數。

   (1) 試繪出 $f(x)$ 的圖形。(3%)
   (2) 試求 $f(x)$ 的傅立葉積分表示式。(7%)
   (3) 試問: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega a}{\omega^2}d\omega=?$ (3%)

5. 已知函數 $f(x)=\left|\sin x\right|, -\infty<x<\infty$，試求 $f(x)$ 的複數形式傅立葉級數。 (10%)

6. 已知 $F(\omega)=\mathcal{F}[e^{-a|x|}]=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$ 其中 $a>0$，試求下列函數之傅立葉轉換。

   (1) $p(x)=e^{-a|x|}\cos bx$。(5%)　(2) $q(x)=x^2 e^{-a|x|}$。(5%)

7. 已知函數 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{1}{a+i\omega}$，其中 $u(x)$ 為單位步階函數且 $a>0$。

   (1) $P(\omega)=\dfrac{1}{3+7i\omega-2\omega^2}$，試問:其傅立葉逆轉換 $p(x)=?$ (5%)
   (2) $2y''(x)+7y'(x)+3y(x)=\delta(x-2)$，試問: $Y(\omega)$ 與 $y(x)$ 為何? (10%)

8. 試求 $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{1}{(1+\omega^2)^2}]=?$ (10%)

傅立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傅立葉級數之 **Parseval** 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傅立葉積分： $f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx,\quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x},\quad \text{其中 } \omega_n=\frac{2n\pi}{T},\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$$

傅立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 **Parseval** 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2d\omega$

Convolution : $f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式： $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

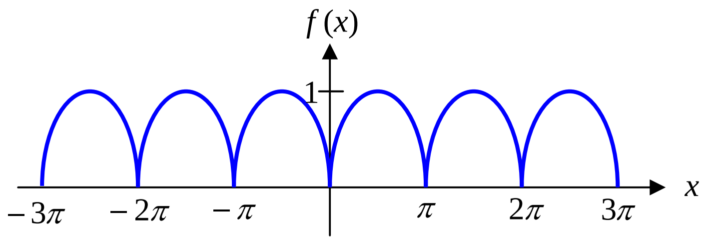
Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$

參考解答:

1. 試繪出下述函數圖形，並問是否為週期函數，若是請說出其週期為何? (10%)

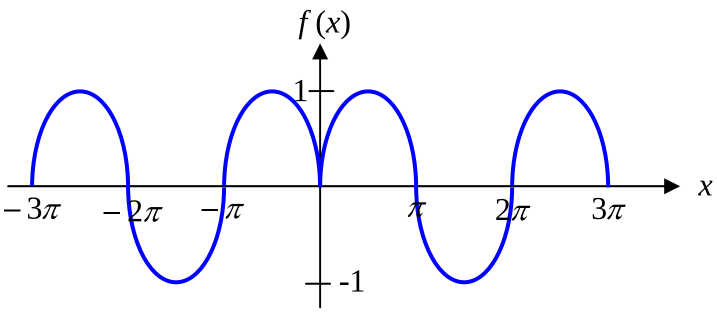
(1) $f(x)=|\sin x|$ (2) $f(x)=\sin|x|$

(1)



由圖可知此為週期函數，週期 $T=\pi$

(2)



由圖可知此為對稱函數但並非週期函數

2. 試判定下列函數那些是奇函數，那些是偶函數，那些是非奇非偶函數? (12%)
（請說明判斷理由，無說明者不給分）

(1) $f(x)=x\sin x+1$ (2) $f(x)=x\sin^2 x+1$

(3) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x},|x|<1$ (4) $f(x)=\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2},|x|<1$

偶函數: $f(x)=f(-x)$, 奇函數: $f(x)=-f(-x)$

(1) $f(-x)=(-x\sin(-x)+1=x\sin x+1=f(x)$

∴ 此為偶函數

(2) $f(-x)=(-x)\sin^2(-x)+1=-x\sin^2 x+1$

∵ 等號右式不等於 $f(x)$，也不等於 $-f(x)$

∴ 此為非奇非偶函數

(3) $f(-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-f(x)$

∴ 此為奇函數

(4) $f(-x)=\ln\dfrac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}=\ln\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=f(x)$

∴ 此為偶函數

3. 給一週期函數 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<\pi \\ \pi, & \pi<x<2\pi \end{cases}$，且其週期 $T=2\pi$ (112 臺大應力)

(1) 試繪出函數 $f(x)$ 之圖形。(2%)

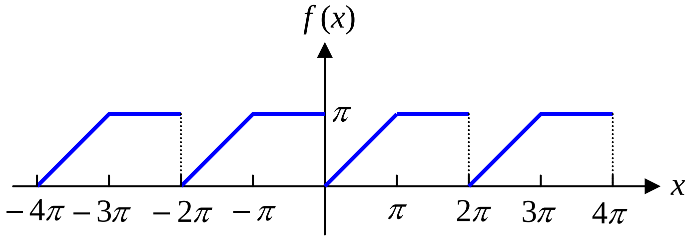
(2) 試問此函數為奇函數、偶函數或是非奇非偶函數? (2%)

(3) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。(8%)

(4) 試問: $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=?$ (4%)

(5) 試問: $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots=?$ (4%)

(1)



(2) 由圖可知此為非奇非偶函數

(3) 將 $f(x)$ 展成傅立葉級數，週期為 $T=2\pi$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}[\int_0^{\pi} f(x)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx]$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\int_0^{\pi} x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} \pi\,dx]=\frac{3\pi}{4}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx=\frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} x\cdot\cos nx\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} \pi\cdot\cos nx\,dx]$$

$$=\frac{1}{\pi}[(\frac{1}{n}x\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx)\Big|_0^{\pi}+\frac{\pi}{n}\sin nx\Big|_{\pi}^{2\pi}]$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=-\frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx=\frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} x\cdot\sin nx\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} \pi\cdot\sin nx\,dx]$$

$$=\frac{1}{\pi}[(-\frac{1}{n}x\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx)\Big|_0^{\pi}-\frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_{\pi}^{2\pi}]$$

$$=\frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi-\frac{\pi}{n}\cos 2n\pi+\frac{\pi}{n}\cos n\pi)=-\frac{1}{n}$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]\cos nx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{2}{n^2}\cos nx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$$

(4) 當 $x = \frac{\pi}{2}$ 時， $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$

(5) 當 $x = \pi$ 時， $f(\pi) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi$

$$\Rightarrow \pi = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi$$

$$\Rightarrow -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

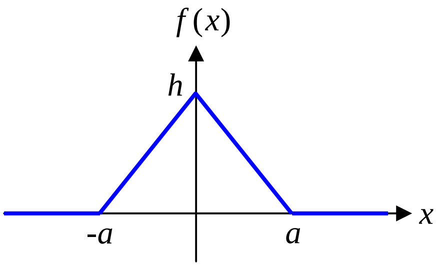
4. 已知函數 $f(x)=\begin{cases} h(1-\dfrac{|x|}{a}), & |x|\le a \\ 0, & |x|>a \end{cases}$，其中 h 與 a 均為常數。

(1) 試繪出 $f(x)$ 的圖形。(3%)

(2) 試求 $f(x)$ 的傅立葉積分表示式。(7%)

(3) 試問: $\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega a}{\omega^2}d\omega = ?$ (3%)

(1)



(2) ∵ 由圖可知此為偶函數

$$\therefore \quad f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\, d\omega \qquad (B(\omega)=0)$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^a h(1-\frac{x}{a})\cos\omega x\, dx$$

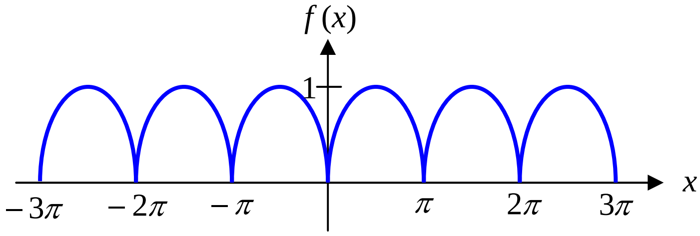
$$=\frac{2h}{\pi\omega^2 a}(1-\cos\omega a)$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{2h}{\pi a}\int_0^\infty \frac{(1-\cos\omega a)\cos\omega x}{\omega^2}d\omega$$

(3) $f(0)=h=\frac{2h}{\pi a}\int_0^\infty \frac{1-\cos\omega a}{\omega^2}d\omega \quad \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1-\cos\omega a}{\omega^2}d\omega = \frac{\pi a}{2}$

5. 已知函數 $f(x)=\left|\sin x\right|, -\infty < x < \infty$ ，試求 $f(x)$ 的複數形式的傅立葉級數。

(10%)



由圖可知 $f(x)=\left|\sin x\right|$ 是週期為 π 的連續函數

$$\therefore \quad \omega_n = \frac{2n\pi}{T} = 2n$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cdot e^{-i2nx}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4n^2}{4n^2-1}\left(-\sin x\cdot\frac{1}{2ni}e^{-i2nx} + \cos x\cdot\frac{1}{4n^2}e^{-i2nx}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4n^2}{4n^2-1}\left(-\frac{1}{4n^2}e^{-i2n\pi} - \frac{1}{4n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1-4n^2}\left(e^{-i2n\pi}+1\right)$$

$$= \frac{2}{\pi(1-4n^2)} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$f(x) = \left|\sin x\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} e^{2nxi}$$

6. 已知 $F(\omega)=\mathcal{F}[e^{-a|x|}]=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$ 其中 $a>0$，試求下列函數之傅立葉轉換。

(1) $p(x)=e^{-a|x|}\cos bx$。(5%)　　(2) $q(x)=x^2 e^{-a|x|}$。(5%)

(1)
$$P(\omega)=\mathcal{F}[p(x)]=\mathcal{F}[e^{-a|x|}\cos bx]=\frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-a|x|}e^{ibx}+e^{-a|x|}e^{-ibx}]$$
$$=\frac{1}{2}[F(\omega-b)+F(\omega+b)]$$
$$=\frac{1}{2}[\frac{2a}{a^2+(\omega-b)^2}+\frac{2a}{a^2+(\omega+b)^2}]$$
$$=\frac{a}{a^2+(\omega-b)^2}+\frac{a}{a^2+(\omega+b)^2}$$

(2)
$$Q(\omega)=\mathcal{F}[q(x)]=\mathcal{F}[x^2e^{-a|x|}]=i^2\frac{d^2}{d\omega^2}F(\omega)$$
$$=-\frac{d^2}{d\omega^2}[\frac{2a}{a^2+\omega^2}]$$
$$=-\frac{d}{d\omega}[\frac{-4\omega a}{(a^2+\omega^2)^2}]$$
$$=-\frac{-4a(a^2+\omega^2)^2+4\omega a\cdot 2(a^2+\omega^2)\cdot 2\omega}{(a^2+\omega^2)^4}$$
$$=\frac{4a(a^2-3\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^3}$$

7. 已知函數 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{1}{a+i\omega}$，其中 $u(x)$ 為單位步階函數且 $a>0$，

(1) $P(\omega)=\dfrac{1}{3+7i\omega-2\omega^2}$，試問:其傅立葉逆轉換 $p(x)=$? (5%)

(2) $2y''(x)+7y'(x)+3y(x)=\delta(x-2)$，試問: $Y(\omega)$ 與 $y(x)$ 為何? (10%)

(1) $p(x)=\mathcal{F}^{-1}[P(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{1}{3+7i\omega-2\omega^2}]$

$$=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(1+2i\omega)(3+i\omega)}]$$

$$=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{5}(\frac{2}{1+2i\omega}-\frac{1}{3+i\omega})]$$

$$=\frac{1}{5}\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{\frac{1}{2}+i\omega}-\frac{1}{3+i\omega}]$$

$$=\frac{1}{5}(e^{-\frac{1}{2}x}-e^{-3x})u(x)$$

(2) $\mathcal{F}[2y''(x)+7y'(x)+3y(x)]=\mathcal{F}[\delta(x-2)]$

$\Rightarrow 2(i\omega)^2Y(\omega)+7(i\omega)Y(\omega)+3Y(\omega)=e^{-2i\omega}$

$\Rightarrow Y(\omega)=\dfrac{e^{-2i\omega}}{3+7i\omega-2\omega^2}$

$\Rightarrow y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{e^{-2i\omega}}{3+7i\omega-2\omega^2}]$

又 $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

$\therefore\ y(x)=p(x-2)=\dfrac{1}{5}[e^{-\frac{1}{2}(x-2)}-e^{-3(x-2)}]u(x-2)$

8. 試求 $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(1+\omega^2)^2}]=?$ (10%)

已知 $g(x)=e^{-a|x|} \Rightarrow G(\omega)=\mathcal{F}[g(x)]=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

$\therefore \quad H(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2} \Rightarrow h(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$

$F(\omega)=\frac{1}{(1+\omega^2)^2}=\frac{1}{1+\omega^2}\cdot\frac{1}{1+\omega^2}=H(\omega)\cdot H(\omega)$

$\therefore \quad f(x)=\mathcal{F}^{-1}[H(\omega)\cdot H(\omega)]=h(x)*h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\tau)h(\tau)\,d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-|x-\tau|}\cdot\frac{1}{2}e^{-|\tau|}\,d\tau$$

當 $x\ge 0$ 時

$$f(x)=\frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-(x-\tau)}\cdot e^{\tau}\,d\tau+\int_{0}^{x} e^{-(x-\tau)}\cdot e^{-\tau}\,d\tau+\int_{x}^{\infty} e^{-(\tau-x)}\cdot e^{-\tau}\,d\tau\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-x+2\tau}\,d\tau+\int_{0}^{x} e^{-x}\,d\tau+\int_{x}^{\infty} e^{-2\tau+x}\,d\tau\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{-x+2\tau}\Big|_{-\infty}^{0}+\tau\cdot e^{-x}\Big|_{0}^{x}-\frac{1}{2}e^{-2\tau+x}\Big|_{x}^{\infty}\right]$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^{-x}+xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x})$$

$$=\frac{1}{4}(e^{-x}+xe^{-x})$$

當 $x<0$ 時

$$f(x)=\frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{x} e^{-(x-\tau)}\cdot e^{\tau}\,d\tau+\int_{x}^{0} e^{-(\tau-x)}\cdot e^{\tau}\,d\tau+\int_{0}^{\infty} e^{-(\tau-x)}\cdot e^{-\tau}\,d\tau\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int_{-\infty}^{x} e^{-x+2\tau}\,d\tau+\int_{x}^{0} e^{x}\,d\tau+\int_{0}^{\infty} e^{-2\tau+x}\,d\tau\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{-x+2\tau}\Big|_{-\infty}^{x}+\tau\cdot e^{x}\Big|_{x}^{0}-\frac{1}{2}e^{-2\tau+x}\Big|_{0}^{\infty}\right]$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^{x}-xe^{x}+\frac{1}{2}e^{x})$$

$$=\frac{1}{4}(e^{x}-xe^{x})$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}(e^{-x}+xe^{-x}), & x\ge 0\\ \frac{1}{4}(e^{x}-xe^{x}), & x<0\end{cases} \quad\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}(e^{-|x|}+|x|e^{-|x|})$$