第十七章

快速富利葉轉換法

17.1 前言

自從1965年Cooley與Tukey發表快速富利葉轉換程式以來，富利葉轉換(Fourier Transform)即更普遍地被應用於各領域，如動力學、聲光學、醫學、數值分析、訊號處理、雷達、電磁學、通訊等，不啻是富利葉轉換的一個小小革命。快速富利葉轉換係利用富利葉轉換所獨特具有之週期性，使其可以較一般標準轉換，快數十倍以上之速度求出。因此富利葉轉換遠較其他轉換，如拉卜拉斯(Laplace Transform)等，更樂於被採用。事實上，拉卜拉斯轉換亦可利用富利葉轉換求得，文內將略加討論。

一般對於暫態反應都採用拉卜拉斯轉換，因其可以直接考慮初始條件；而富利葉轉換則僅用於求解穩態反應。實際上，由富利葉轉換所得之穩態解，即為特解部分，如再加上補解使其滿足初始條件即可求得暫態反應之全解。本章將詳述其求解過程，並提供副程式$FFTTRS$，可用以求解動力系統之穩態及暫態反應。

一般理論常僅涉及週期函數之富利葉級數及非週期函數之富利葉積分；而實際數值計算者，則為離散富利葉轉換。這三者雖極相似，但亦具有頗多相異性。如不深入了解，常不能隨心所欲地加以運用。本章即試著從各種角度來探討這三者之關係，以便能正確使用這些轉換。

快速富利葉轉換之原理簡單而奧妙，本章將做一詳細說明。相信知其奧秘後必嘆為觀止。本章提供一可能是最短的副程式$FFTA$，可以計算任意個數之複數之富利葉轉換。並提供實數及共軛複數之富利葉轉換副程式$FFTR$及$FFTC$，正餘弦轉換 副程式$FFTCS$，半正餘弦轉換副程式$FFTSC$，及相關之二維轉換程式$FFT2D$及$FFT2SC$。

17.2 頻率域分析法

一般在求解動力方程式(17.1)(已正規化)時，可利用Duhamel積分直接求解如式(17.2)。

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\Omega\dot{y}(t) + \Omega^2 y(t) = f(t) \tag{17.1}$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}\Omega}\int_0^t f(\tau)e^{-\xi\Omega(t-\tau)}\sin[\sqrt{1-\xi^2}\Omega(t-\tau)]\,d\tau \tag{17.2}$$

這樣稱做時間域 (Time domain)的分析法，因其直接在時間域做積分來求解(當然時間域分析亦可用一般之常微分方程數值解法)。

但亦可假設$f(t)$為一週期性函數 (其週期T可任意假設，但須使T包含欲求取反應之範圍)，以富利葉級數 (Fourier series)展開成：

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T}t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{2\pi n}{T}t) \tag{17.3}$$

式中

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi n}{T}t)\,dt \tag{17.4}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi n}{T}t)\,dt \tag{17.5}$$

亦即將該荷重分解成：(a)含一定荷重$\frac{1}{2}a_0$(表示平均荷重)及(b)一系列頻率為$\omega_n = 2\pi n/T$，振幅為a_n及b_n的諧和荷重 (Harmonic loading)。

如此將$f(t)$分解成各諧和分量之後，即可求出結構物受各諧和分量作用之反應，再將各反應量相加，即得特解部分之總反應如下：

$$\begin{aligned} y^p(t) \;=\; \Omega^{-2}\{\frac{1}{2}a_0 &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n[(1-\beta_n^2)\cos\omega_n t + 2\xi\beta_n\sin\omega_n t]}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n[(1-\beta_n^2)\sin\omega_n t - 2\xi\beta_n\cos\omega_n t]}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}\} \end{aligned} \tag{17.6}$$

式中

$$\beta_n = \omega_n/\Omega \tag{17.7}$$

$$\omega_n = n\omega_1 = \frac{2\pi n}{T} \tag{17.8}$$

上式應再加上下式之補解，即可得式(17.1)之通解。式中A, B可由初始條件$y(0)$及$\dot{y}(0)$求得。

$$y^c(t) = e^{-\xi\Omega t}(A\sin(\sqrt{1-\xi^2}\Omega t) + B\cos(\sqrt{1-\xi^2}\Omega t)) \tag{17.9}$$

將$f(t)$分解成各種頻率的諧和分量，再分析求解式(17.1)的方法稱為頻率域 (Frequency domain)分析法。

17.3 富利葉級數的複數表示法

利用 Euler 公式可將富利葉級數的 cos 和 sin 項改寫成複數指數形式。因為

$$\sin n\theta = \frac{1}{2i}(e^{in\theta} - e^{-in\theta}) \tag{17.10}$$

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \tag{17.11}$$

所以

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T}t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{2\pi n}{T}t) \tag{17.3}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t} \tag{17.12}$$

式中

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}dt \tag{17.13}$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \tag{17.14}$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \tag{17.15}$$

既然 $f(t)$ 可表示成式(17.12)之複數指數形式，因此可視 $e^{i\omega_n t}$ 為一單位作用函數，代入運動方程式 (17.1) 中可得

$$y(t) = H_n e^{i\omega_n t} \tag{17.16}$$

式中

$$H_n = \frac{1}{(\Omega^2 - \omega_n^2) + 2\xi\Omega\omega_n i} \tag{17.17}$$

式(17.1) 系統受式(17.12) 之 $f(t)$ 作用之特解部分之反應可用疊加原理得

$$y^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n C_n e^{i\omega_n t} \tag{17.18}$$

注意式(17.6) 中，受一正弦 (或餘弦) 分量作用之反應，包含正弦及餘弦兩種分量；而由式(17.18) 知，受一複數指數形式之分量 $e^{i\omega_n t}$ 作用之反應，則僅包含一個相同指數形式之分量，且其反應係數 H_n 較為簡潔，故應用上較為方便。

但式(17.18) 中之係數 C_n 及 H_n 均為複數，應用在實數領域較為奇怪：因為作用函數 $f(t)$ 如為實數，則其反應 $y(t)$ 必然亦為實數。對於此點，茲簡單說明如下：

(1) 先注意在複數指數形式之式 (17.13) 及式 (17.18) 中，n 值包含負值。而當 $f(t)$ 為實數時，C_n 與 C_{-n} 一定互為共軛複數，故 $C_n e^{i\omega_n t}$ 與 $C_{-n}e^{-i\omega_n t}$ 亦互為共軛複數，因此兩者相加後必能消去虛數部分。這也就是為何式(17.13)必須包含正負 n 值，而式(17.4)與式(17.5)只包含正 n 值之原因。
(2) 再注意對於式 (17.1) 之實係數系統 (或其他實係數系統)，其反應係數 H_n 與 H_{-n} 必為共軛複數對。故 $H_n C_n e^{i\omega_n t}$ 與 $H_{-n}C_{-n}e^{-i\omega_n t}$ 亦必為共軛複數對，兩者相加必然會消去虛數部分，而僅得到實數之反應，因此複數用於實數問題並無抵觸現象。

17.4 富利葉級數之數值計算式–離散富利葉轉換

在富利葉級數中

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t} \tag{17.12}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}dt \tag{17.13}$$

C_n 值之計算可採用梯形面積法，將 $t=0$ 至 T 間分成 N 等分求函數和。令

$$\Delta t = t_1 = \frac{T}{N}\,, \qquad \Delta\omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

及

$$t_k = kt_1 = k\Delta t, \qquad \omega_n = n\omega_1 = n\Delta\omega$$

得

$$\omega_n t_k = (\Delta\omega\,\Delta t)nk = (\frac{2\pi}{N})nk \tag{17.19}$$

則可將式(17.12)與式(17.13)寫成

$$f_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n W^{-kn} \tag{17.20}$$

$$C_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{nk}\,, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N/2 \tag{17.21}$$

$$= 0\,, \qquad |n| > N/2 \quad (\text{式(17.21)之誤差太大}) \tag{17.22}$$

式中

$$W = e^{-2\pi i/N} \tag{17.23}$$

比較式(17.13)與式(17.21)可發現下述特性：

(1) 式(17.21)為式(17.13)之積分式以梯形面積法近似之公式，已由積分型式改為求和型式。

(2) 式(17.21)算得之C_n具有週期性，其週期為N，亦即

$$C_n = C_{N+n} = C_{2N+n} = \cdots, \qquad C_{-n} = C_{N-n} = C_{2N-n} = \cdots \tag{17.24}$$

(3) 式(17.13)算得之C_n並無週期性，且當n值愈大時C_n值愈小。

(4) 當$f(t)$為實數時，式(17.13)與式(17.21)之C_n與C_{-n}均為共軛複數對。

根據上述特性，式(17.21)之C_n對應於式(17.13)之C_n之範圍為$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N/2$。此範圍外之$C_n$利用式(17.21)僅由$N$個$f(t)$值已無法準確地算出，必須假設為零，如式(17.22)所示。因此由式(17.20)計算f_k之加總範圍應改為$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N/2$，但由於$C_n$及$C_{-n}$之週期性，其加總範圍亦可改為$n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$，但須注意$C_{N-n}$仍代表$C_{-n}$之值$(n \le N/2)$，此點在計算$H_nC_n$時尤應注意，因此

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} C_n W^{-kn} \tag{17.25}$$

$$C_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{nk}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{17.26}$$

另注意式(17.26)中之f_k為$t = 0$至T間之片段連續函數，取$t = k\Delta t$各點之值，以梯形面積法求C_n之積分。而式(17.25)中之C_n為ω之不連續函數，僅當$\omega = n\Delta\omega$時有值，其餘之值為零。式(17.25)與式(17.26)一般稱為離散富利葉轉換(對)。

17.5 非週期性函數之富利葉積分

假若$f(t)$為非週期性函數，如地震力，則可將其視為週期$T = \infty$的函數來處理。如此富利葉級數須重新推導，使能適用於無限長週期的函數，其轉換表示式為一積分式，故改稱為富利葉積分。 在富利葉級數中

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t} \tag{17.12}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}dt \tag{17.13}$$

當$T \to \infty$時，令$C_n = F(\omega_n)\Delta\omega$，代入上式得

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega & (17.27) \\ F(\omega_n)\Delta\omega &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt & (17.28) \end{aligned}$$

利用$\Delta\omega = 2\pi/T$並令其趨近於$d\omega$，得

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega & (17.29) \\ F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt & (17.30) \end{aligned}$$

式(17.29)與式(17.30)一般稱為富利葉積分(對)。

實用上，上二式之富利葉積分須用數值積分法計算，並做下面之考慮：

(1)假設計算反應之關注範圍為$t = 0$至T。

(2)設$t = 0$至T間以外之$f(t) = 0$。如果不為零仍可直接設為零，因為$t > T$之$f(t)$不影響$t = 0$至T間之反應，而$t < 0$之$f(t)$之影響可用$t = 0$之初始條件計入。因此，式(17.30)之積分範圍變為$0 \to T$。

(3)將$t = 0$至T間分為N等分，即令$\Delta t = T/N$。

(4)式(17.30)之$F(\omega)$為連續函數，但可以只計算$\omega = n\Delta\omega$之$F(n\Delta\omega)$，令其中之$\Delta\omega = 2\pi/T$。

(5)由以上四項考慮處理後，式(17.29)與式(17.30)之富利葉積分變成

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n W^{-kn} & & (17.31) \\ F_n &= \frac{T}{2\pi N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{nk}\,, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N/2 \quad & (17.32) \\ &= 0\,, & |n| > N/2 \quad (\text{式}(17.32)\text{之誤差太大}) \quad & (17.33) \end{aligned}$$

式中

$$W = e^{-2\pi i/N} \qquad (17.34)$$

(6)式(17.32)之F_n雖為週期性，但可用F_n之範圍為$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N/2$；$|n| > N/2$之$F_n$值以式(17.32)僅用$N$個$f_k$計算，其誤差太大，不能採用，須設為零，如式(17.33)所示。

(7)式(17.31)之加總範圍應改為$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N/2$。但由於$F_n$及

W^{-kn} 之週期性，其加總範圍亦可改為 $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ 。因此

$$f_k = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=0}^{N-1} F_n W^{-kn} \tag{17.35}$$

$$F_n = \frac{T}{2\pi N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{nk}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{17.36}$$

(8) 比較式 (17.25)(17.26) 與式 (17.35)(17.36) ，如令

$$C_n = (\frac{2\pi}{T})F_n \tag{17.37}$$

則二式完全相同。因此觀念上非週期性之函數 $f(t)$ ，亦可視為週期 T 之週期函數，而照週期函數處理，只要週期 T 包含反應分析之關注範圍。

(9) $C_n = (2\pi/T)F_n = \Delta\omega F_n$ 可視為將連續分布函數 $F(\omega)$ 在 $\omega_n - \Delta\omega/2 \leq \omega \leq \omega_n + \Delta\omega/2$ 範圍內之值集中在 ω_n 一點。

(10) 因所能算得之 F_n 之最大頻率為 $\Delta\omega N/2 = \pi N/T$ ，大於此頻率之 F_n 均被假設為零。故所選用之 N/T 應夠大或 $\Delta t = T/N$ 應夠小。

(11) 當 T 或 $\Delta\omega$ 固定時， N 愈大，則 C_n 或 F_n 愈準確，能算得之頻率範圍較高。當 N 固定時， T 愈大 ($\Delta\omega$ 愈小) ，則 C_n 或 F_n 愈不準，能算得之頻率範圍較低。當 $\Delta t = T/N$ 固定時， N 與 T 愈大 ($\Delta\omega$ 愈小) ，則能算得之頻率範圍不變。

(12) 一般地震反應分析時， $N, T, \Delta t$ 各值通常取如 [表一] 所示。其範圍約為 $N = 256$ 至 4096 ， $T = 10.24$ 至 40.96 秒， $\Delta t = 0.005$ 至 0.10 秒。

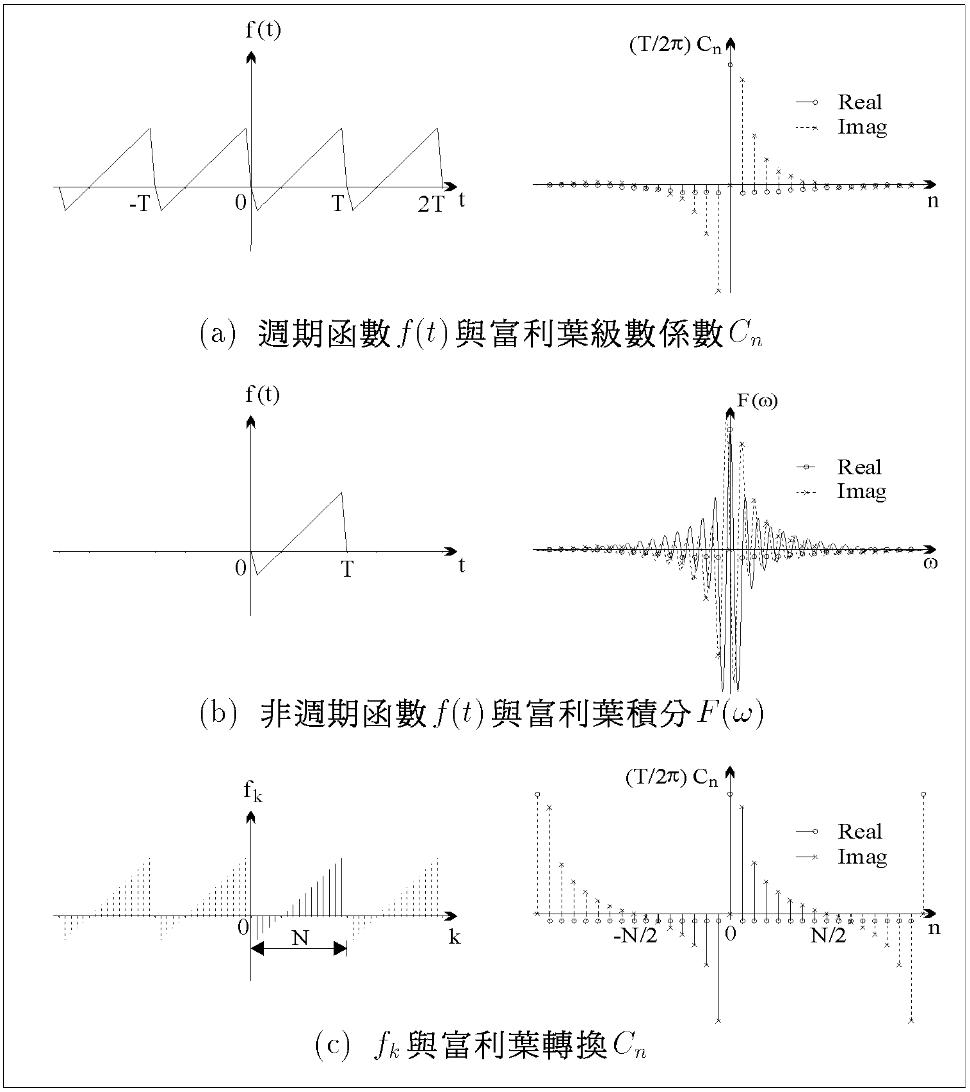
[表一]　常用之週期 T=$N\Delta t$(秒)

N\\Δt	0.005	0.010	0.020	0.050	0.100
256	-	-	-	12.80	25.60
512	-	-	10.24	25.60	51.20
1024	-	10.24	20.48	51.20	-
2048	10.24	20.48	40.96	-	-
4096	20.48	40.96	-	-	-

17.6 富利葉級數與富利葉積分之異同

式 (17.12) 之富利葉級數，與式 (17.29) 之富利葉積分，經離散化後分別成為式 (17.25) 及式 (17.35) 之離散富利葉轉換。其中 C_n 與 F_n 之關係以式

(17.37) 對應後，式 (17.25) 及式 (17.35) 實際上是一樣的。但兩者觀念上有許多相異處，大部分已於前面述及，茲再綜合列舉其異同點如下以為參考之用 (並參照圖一) ：



圖一 富利葉級數、積分與轉換

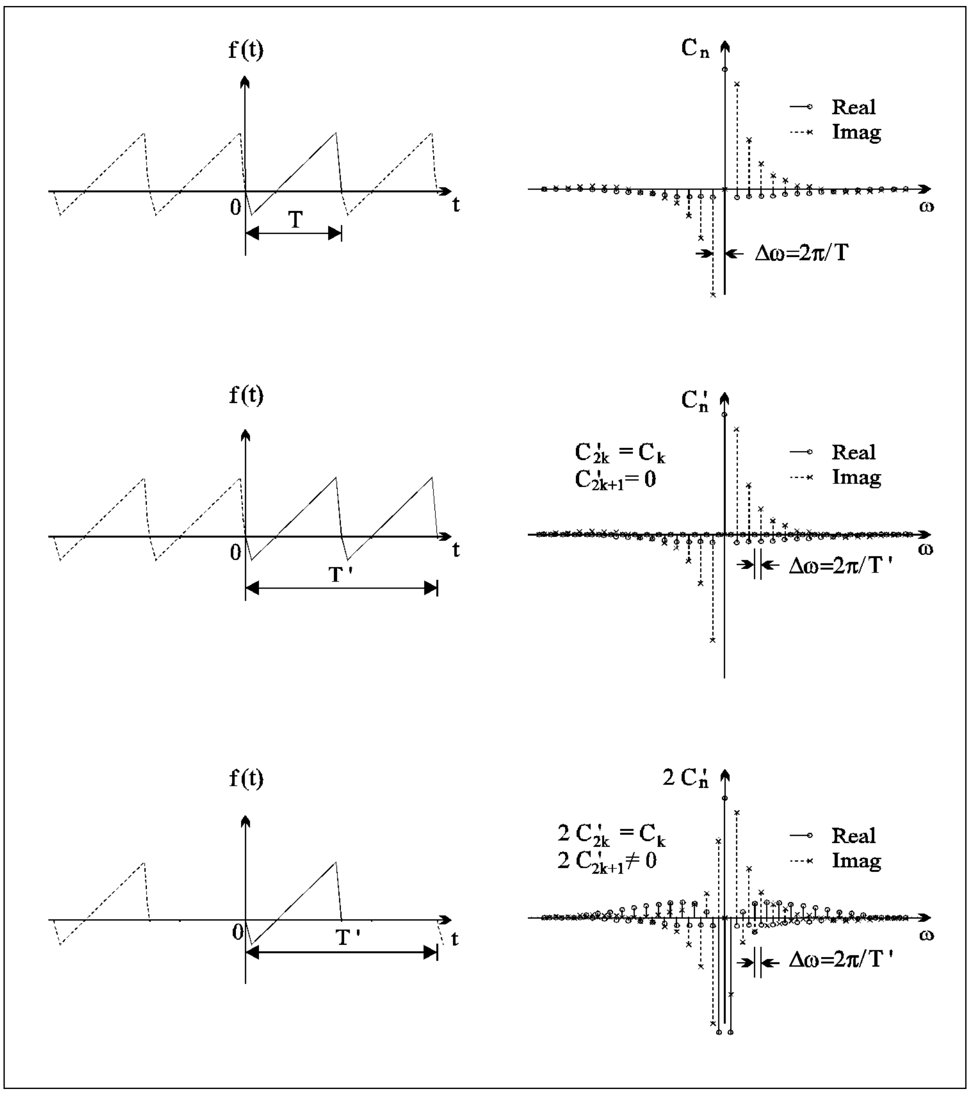
(1) C_n 為離散函數 (為許多等間距之 Delta function) ，$F(\omega)$ 為連續函數。F_n 為連續函數在 $\omega = \omega_n$ 點上之函數值。C_n 則可視為將 $F(\omega)$ 在 $\omega_n - \Delta\omega/2 \leq \omega \leq \omega_n + \Delta\omega/2$ 間之值集中在 ω_n 點上。

(2) C_n 與 F_n 均非週期函數，且當 $n \to \infty$ 時，$C_n \to 0$ ，$F_n \to 0$ 。但因積分計算之近似誤差，造成 C_n 與 F_n 亦成週期函數。因此必須令 $|n| > N/2$ 之

C_n與F_n為零。

(3) 當$f(t)$為實數時，C_n與C_{-n}及F_n與F_{-n}均為共軛複數對。

(4) 由式(17.12)算得之$f(t)$為週期函數，由式(17.29)算得之$f(t)$為非週期函數；但由式(17.25)與式(17.35)算得之f_k均為週期函數。式(17.12)本來就是計算級數和，式(17.25)只是去掉較高頻之C_n，即取有限項之和，其誤差僅為少計入高頻之貢獻而已。而式(17.29)之$f(t)$係由積分算得，並非週期函數，但改由式(17.35)以求和代替積分後必然使$f(t)$成為週期函數，其週期為$T = 2\pi/\ \Delta\omega$。當$\Delta\omega$愈小時可使週期T變長，參見圖二。而當$\Delta\omega \to 0$時，$T \to \infty$即可使$f(t)$成為非週期函數。



圖二 週期變化對轉換係數之影響

(5) 對於非週期且非有限範圍之函數之處理：一般計算反應均有一固定之關注範圍，設其為$t=0$至T_1。則可截取$t=0$至T_1間之函數，然後假設此段函數每隔T秒重複出現。即考慮其為週期T之週期函數，而可利用富利葉級數之觀念處理；亦可假設此段範圍以外($t<0$及$t>T_1$)之函數值為零，即可利用富利葉積分之觀念處理。兩者在計算式(17.25)及式(17.35)時，可採用較大之T計算。

17.7 利用 FFT 解動力反應之注意事項

在第一節已述及動力方程式 (17.18)

$$\ddot{y}(t)+2\xi\Omega\dot{y}(t)+\Omega^2y(t)=f(t) \tag{17.1}$$

受週期函數$f(t)$作用之特解為式(17.18)

$$y^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n C_n e^{i\omega_n t} \tag{17.18}$$

式中

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}dt \tag{17.13}$$

$$H_n = \frac{1}{(\Omega^2-\omega_n^2)+2\xi\Omega\omega_n i} \tag{17.17}$$

及補解為

$$y^c(t)=e^{-\xi\Omega t}(A\sin(\sqrt{1-\xi^2}\Omega t)+B\cos(\sqrt{1-\xi^2}\Omega t)) \tag{17.9}$$

對於受非週期函數$f(t)$作用時，應改用富利葉積分，但觀念上仍可視為週期函數處理。不論用富利葉級數或富利葉積分，最後都可化為離散富利葉轉換。因此特解成為

$$y_k = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n W^{-kn} \tag{17.38}$$

式中

$$Y_n = H_n C_n \tag{17.39}$$

$$C_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{nk}, \qquad n=0,1,2,\ldots,N-1 \tag{17.26}$$

$$H_n = \frac{1}{(\Omega^2-\omega_n^2)+2\xi\Omega\omega_n i} \tag{17.17}$$