河工系 工數二B 第一次作業解答

擺線曲率計算：(假設 $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$, $y'=\frac{dy}{dx}$)

1. 若平面曲線為 $y=y(x)$ 之顯示式，其曲率半徑為 $\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ ，

當 $\begin{cases} y=y(t) \\ x=x(t) \end{cases}$ 求 $\rho=?$

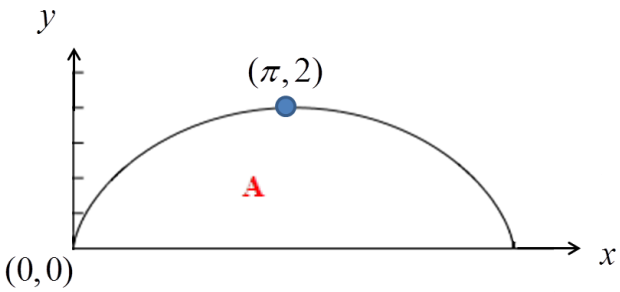
$$\frac{\left(1+y(x)'^2\right)^{3/2}}{y(x)''}=\frac{\left(1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}{dx}}=\frac{\left(1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d\frac{\dot{y}}{\dot{x}}}{dt}\frac{dt}{dx}}=\frac{\left(1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2}\frac{1}{\dot{x}}}=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}$$

2.利用上題求得結果計算單位圓曲率半徑為?

$y=\sqrt{1-x^2}$ (老師上課講過) $\rightarrow \begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin t \end{cases} \rightarrow \rho?$

$$\frac{((-\sin t)^2+\cos^2 t)^{3/2}}{(-\sin t)^2+\cos^2 t}=1$$

3. 若一運動曲線(擺線) $\begin{cases} x(t)=t-\sin t \\ y(t)=1-\cos t \end{cases}$



求 A 點曲率半徑(由 1 所推導的來計算)

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=1-\cos t \\ \dot{y}=\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}=\sin t \\ \ddot{y}=-\cos t \end{cases}$$

$$\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}\dot{x}-\ddot{x}\dot{y}}=\frac{((1-\cos t)^2+\sin^2 t)^{3/2}}{\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}=\frac{(2-2\cos t)^{3/2}}{\cos t-1}$$

$$=-2\sqrt{2-2\cos t}$$

4.請將上述擺線方程式的參數 t 消除，改造成 $y=y(x)$ 或 $x=x(y)$ 之顯示式，並利用此顯示式計算上題曲率半徑，比較結果是否一樣?

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$$

$1-y=\cos t \Rightarrow t=\cos^{-1}(1-y)$帶回$x$

$x=\cos^{-1}(1-y)-\sqrt{2y-y^2}$(備註)

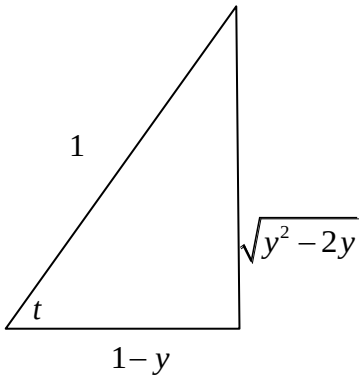
$$x'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-y)^2}}-\frac{1-y}{\sqrt{2y-y^2}}$$

$$x''=-\frac{1-y}{(1-(1-y)^2)^{3/2}}+\frac{(2-2y)^2}{4(2y-y^2)^{3/2}}+\frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}$$

$$\rho=\frac{(1+x'^2)^{3/2}}{x''}=\frac{\left(1+\left(\frac{1}{\sqrt{1-(1-y)^2}}-\frac{1-y}{\sqrt{2y-y^2}}\right)^2\right)^{3/2}}{-\frac{1-y}{(1-(1-y)^2)^{3/2}}+\frac{(2-2y)^2}{4(2y-y^2)^{3/2}}+\frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}}=\frac{\left(1+\frac{y}{2-y}\right)^{3/2}}{\frac{y}{\left(2y-y^2\right)^{3/2}}}=2\sqrt{2y}$$

備註

$\sin(\cos^{-1}(1-y))=\sqrt{y^2-2y}$



補充

3 與 4 的結果可看出是相同的嗎?

$\because y=1-\cos t$

$\therefore -2\sqrt{2-2\cos t}=-2\sqrt{2y}$

5.將方法推到三維可用嗎?

否