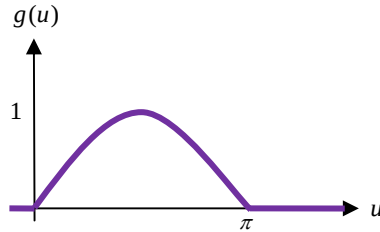
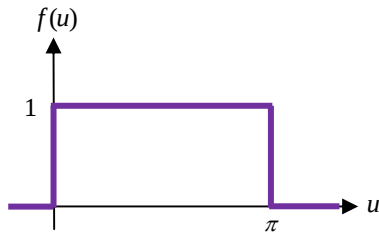


工數第三次大考 (Fourier & Laplace transform) 13:00-16:00 June 18, 2014

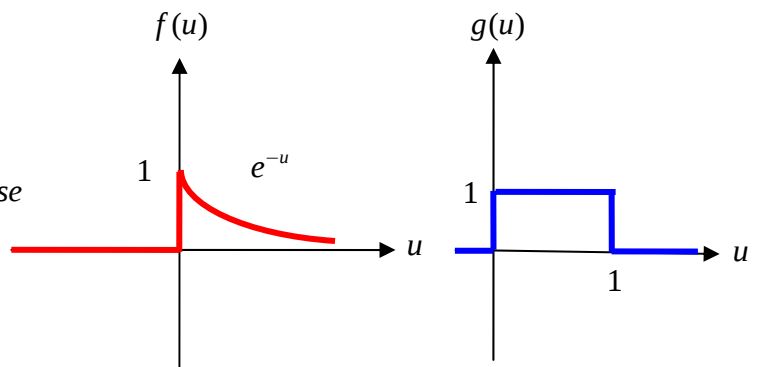
日期：2014 年 6 月 18 日 姓名：_____ 學號：_____

1. Define $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du$ (convolution) $f \circ g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t+u)du$ (correlation)Given $f(u)$ and $g(u)$ function, $f(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ and $g(u) = \begin{cases} \sin(u), & 0 \leq u \leq \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 

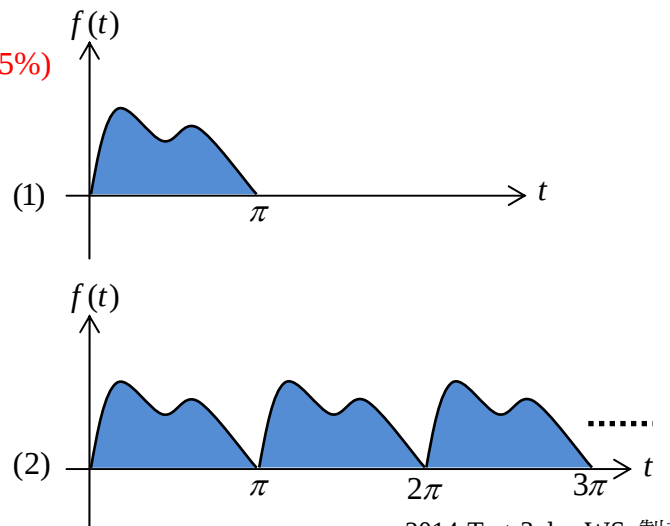
- (a) Plot $g(-u)$ versus u . (2%) 函數 $f(u)$ 與 $f(-u)$ 的 Fourier transform, 兩者有何關係? (6%)
 (b) Plot $g(t-u)$ versus u for (1) $t < 0$ (2) $0 < t < \pi$ (3) $t > \pi$ (6%)
 (c) Find (1) $h(t) = f * g$ (2) $c(t) = f \circ g$ (10%)
 (d) Find (1) $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$ (2) $C(\omega) = \mathcal{F}[c(t)]$, 其中 $\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = F(\omega)$ (10%)
 (e) 請討論 $f * g$ 與 $g * f$ 是否一樣(請說明原因) (3%)
 (f) 請討論 $f \circ g$ 與 $g \circ f$ 若不一樣, 請說明差別處為何 (3%)
 (g) 畫出 $\mathcal{F}[g(t)]$ 的圖 (2%)

2. Fourier transform 與 Laplace transform 何處相同(2%), 何處不同(2%), 請說明原因。

3. Convolution and correlation

Given $f(u)$ and $g(u)$ function, $f(u) = \begin{cases} e^{-u}, & u \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ and $g(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 

- (a) Find (1) $g * f$ (2) $f * g$ (10%)
 (b) Find (1) $g \circ f$ (2) $f \circ g$ (10%)

4. 若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 請用 $F(s)$ 回答下列變換性質 (15%)(a) 若 $\mathcal{L}[f'] = sF(s) - f(0)$, 則 $\mathcal{L}[f''] = ?$ (b) $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = ?$ (c) 若 $F(s)$ 為右圖(1)中函數 $f(t)$ 的 Laplace transform, 那圖(2)的 Laplace transform 為何?

5.請對表一中的函數做 Laplace transform，並在表二中尋找適合的答案填入。

(請在答案紙上以表格的形式作答，答案請填寫代號) (10%)

表一

$f(t)$	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$p_4(t)$	$p_5(t)$	$p_6(t)$	$p_7(t)$	$p_8(t)$	$p_9(t)$	$p_{10}(t)$
$F(s)$										

Time function, $f(t)$

$$p_1(t) = 1 \quad p_2(t) = \cos(t) \quad p_3(t) = \sin(t) \quad p_4(t) = t \cos(t) \quad p_5(t) = t \sin(t)$$

$$p_6(t) = e^t \quad p_7(t) = \cosh(t) \quad p_8(t) = \sinh(t) \quad p_9(t) = t \cosh(t) \quad p_{10}(t) = t \sinh(t)$$

$$\text{Hint: } \cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad \sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

s function, $F(s)$

表二

(1) $\frac{1}{s}$	(2) $\frac{s}{s^2 + 1}$	(3) $\frac{s}{s^2 - 1}$	(4) $\frac{1}{s^2 + 1}$
(5) $\frac{1}{s^2 - 1}$	(6) $\frac{1}{s - 1}$	(7) $\frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$	(8) $\frac{s}{(s^2 + 1)^2}$
(9) $\frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$	(10) $\frac{s^2 + 1}{(s^2 - 1)^2}$	(11) $\frac{s}{(s^2 - 1)^2}$	(12) $\frac{2s}{(s^2 - 1)^2}$

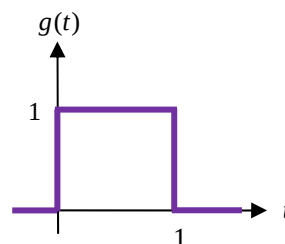
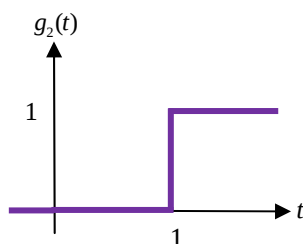
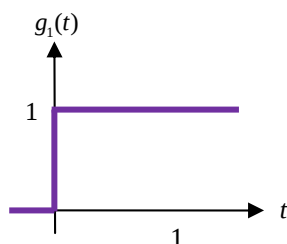
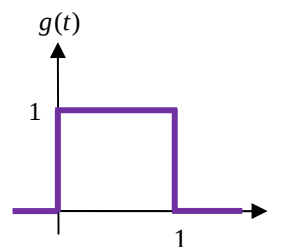
6. 以 Laplace transform 求解 (5%)

$$\dot{y}(t) + y(t) = 0, y(0) = 1$$

7. $\dot{y}(t) + y(t) = g(t), y(0) = 0$

(1) 請以上學期解 ODE 之方法求補解,特解及全解 (5%)

(2) 請先求出下列圖示中函數 $g_1(t)$, $g_2(t)$ 及 $g(t)$ 之對應的 Laplace transform. (6%)



(3) 請用 Laplace transform 及褶積法兩法分別求上述 ODE 之解 (10%)

本題使用褶積法與上面第 3 大題結果有何關係 (5%)

8.上了一學年的工程數學對下列各項有何建議或意見，同學們的寶貴意見有助於下學年之教學作為參考?學弟妹之福、河工之福、海大之福。

(1) 講義 (4%) (2) 老師 (3%) (3) 助教 (3%) 請針對主題回答否則不予計分。