待定係數法-求特解

海大河海系 陳正宗

待定係數法 n階常係數方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

的非齊性解y_p必與$f(x)$有某種關係。所以, 我們可根據$f(x)$的形式及微分關係, 假設一個含有若干未知係數之形式的y_p, 然後代入原式中以決定這些係數, 從而求 出y_p。此法稱爲待定係數法 (method of undetermined coefficients).

以待定係數法求特解時, 常用的y_p假設形式如下表:

$f(x)$	$y_p(x)$
x^n	$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0$
e^{ax}	ke^{ax}
$\sin ax$	$k_1 \cos ax + k_2 \sin ax$
$\cos ax$	$k_1 \cos ax + k_2 \sin ax$
$x^n e^{ax} \sin ax$	$e^{ax} \{\cos ax\,(k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0) +$ $\sin ax\,(\ell_n x^n + \ell_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \ell_1 x + \ell_0)\}$
$x^n e^{ax} \cos ax$	$e^{ax} \{\cos ax\,(k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0) +$ $\sin ax\,(\ell_n x^n + \ell_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \ell_1 x + \ell_0)\}$

Examples: (待定係數法) 解$y'' + 9y = \cos 3x + 2xe^x$ (工技化工)

由特徵方程式$\lambda^2 + 9 = 0$之根爲$\lambda = \pm 3i$, 可得齊性解爲

$$y_h(x) = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

根據待定係數法, 設非齊性解

$y_p(x) = x(a\cos 3x + b\sin 3x) + (kx + \ell)e^x$.

代入原式, 得

$$\begin{aligned} &\{[-6a\sin 3x + 6b\cos 3x - 9ax\sin 3x - 9bx\cos 3x + 2ke^x + (kx+\ell)e^x] \\ &\quad + 9x(a\cos 3x + b\sin 3x) + 9(kx+\ell)e^x\} \\ &= 6b\cos 3x - 6a\sin 3x + 10kxe^x + (2k + 10\ell)e^x \\ &= \cos 3x + 2xe^x \end{aligned}$$

由上式可得$a = 0$, $b = \frac{1}{6}$, $k = \frac{1}{5}$, $\ell = -\frac{1}{25}$, 亦即

$$y_p = \frac{x}{6}\sin 3x + (\frac{x}{5} - \frac{1}{25})$$

於是通解 $y = y_h + y_p = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{x}{6}\sin 3x + (\frac{x}{5} - \frac{1}{25})$