級數解–常微分方程式之常點與奇點

海大河海系 陳正宗

爲何定義？解的級數表示式

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

可以上式級數式表示的解

$$y(x)=e^x, sin(x), cos(x)$$

不可以上式級數式表示的解

$$y(x)=e^x/x, sin(x)/\sqrt{x}, \sqrt{x}, 1/x^2$$

函數在該點可解析？

對二階常微分方程式$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$而言:

若$p(x)$與$q(x)$在$x=a$均解析, 則稱$x=a$ 爲該方程式之常點 (regular point)。

此時該方程式在$x=a$有 Taylor 級數解。

若$p(x)$與$q(x)$中至少有一個在$x=a$不解析

若$(x-a)p(x)$與$(x-a)^2q(x)$在$x=a$均解析, 則稱$x=a$爲該方程式之規則奇點 (regular singular point)。

此時該方程式在$x=a$有 Frobenius 級數解。

若$(x-a)p(x)$與$(x-a)^2q(x)$中至少有一個在$x=a$不解析, 則稱$x=a$爲該方程式之不規則奇點 (irregular singular point)。此時該方程式在$x=a$不一定有 Frobenius 級數解。

若函數$f(x)$在$x=a$處之任意階導數皆存在, 則稱$f(x)$在$x=a$爲解析,

範例 1:

試求$(1-x^2)y''-2xy'+\nu(\nu+1)y=0$的奇點位置並判斷種類?

原式可改寫爲$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{v(v+1)}{1-x^2}y=0$

因$-\frac{2x}{(1-x^2)}$與$\frac{v(v+1)}{1-x^2}$在$x=\pm1$不解析, 故原式之奇點爲$x=\pm1$,

因$(x+1)\frac{-2x}{(1-x^2)}$與$(x+1)^2\frac{v(v+1)}{1-x^2}$在$x=-1$爲解析, 故$x=\pm1$爲規則奇點。

範例 2:

對於二階方程式$y''+\sqrt{x}y=0$,$x\geq0$, 請問:
$x=0$是否爲不規則奇點?
若令$t=\sqrt{x}$做變數變換, 則$t=0$是否爲規則奇點?

因$p(x)=0,\ q(x)=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ p(x)$在$x=0$解析, 而$q(x)$與$x^2q(x)$在$x=0$皆不解析, 故$x=0$爲不規則奇點。

依題意令$t=\sqrt{x}$, 則

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dy}{dt}\\ \frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}(\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dy}{dt})=-\frac{1}{4t^3}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{4t^2}\frac{d^2y}{dt}\end{aligned}$$

代入原式, 得$\frac{dy^2}{dt^2}-\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+4t^3y=0$, 即$p(t)=-\frac{1}{4},\quad q(t)=4t^3\quad\Rightarrow\quad tp(t)$與$t^2q(t)$在$t=0$皆解析, 故$t=0$爲規則奇點。