國立臺灣海洋大學河海工程學系 2016 工程數學(一) 第二次大考參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 考慮下述三條微分方程式

   (a) $y''(t)-3y'(t)-3y(t)=0$　(b) $y''(t)+4y(t)=0$　(c) $y''(t)+8y'(t)+15y(t)=0$

   試問:

   (1) 當 $t\to\infty$，何者會產生週期性振動的解? (4%)

   (2) 當 $t\to\infty$，何者的解會衰減到零? (4%)

   (3) 當 $t\to\infty$，何者會產生無窮大的解? (4%)

2. 已知線性微分方程 $x^2y''(x)+axy'(x)+by(x)=x\ln x$ 有兩個補解 x 與 $x\ln x$

   (1) 試求常數 a 與 b 為何? (8%)

   (2) 試求此微分方程之通解。 (7%)

3. 試求下述微分方程之通解

   (1) $y^{(4)}-2y''+y=16e^t$　(8%)

   (2) $x^2y''+xy'-y=\ln x$　(8%)

   (3) $x(1-x)y''+2(1-2x)y'-2y=6x-2$　(8%)

4. 已知一微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{d}{dx}(\dfrac{y}{x})+\dfrac{2y}{x^2}=x^{-2}$　$(x>0)$

   (1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x)=$? (6%)

   (2) 以變數變換，令 $t=\ln x$，則 $y(x)=Y(t)$，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (6%)

   (3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t)=$? (6%)

   (4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t)=$? (6%)

   (5) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$。 (3%)

5. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$，若給定質量塊 $m=4$，阻尼係數 $c=0$ 與彈簧常數 $k=36$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0)=0$ 與 $\dot{y}(0)=0$，給一外力為 $f(t)=\cos\omega t$

   試問:

   (1) 當 $\omega=$?，此系統會產生共振行為。 (4%)

   (2) 當系統產生共振時，此時其解為何? (8%)

6. 已知微分方程式 $x^2y''-(x^2+2x)y'+(x+2)y=0$

   (1) 試以觀察法求一補解 y_1。 (3%)

   (2) 試求其通解。 (7%)

參考解答:

1. 考慮下述三條微分方程式

(a) $y''(t)-3y'(t)-3y(t)=0$ **(b)** $y''(t)+4y(t)=0$ **(c)** $y''(t)+8y'(t)+15y(t)=0$

試問:

(1) 當 $t\to\infty$，何者會產生週期性振動的解? (4%)

(2) 當 $t\to\infty$，何者的解會衰減到零? (4%)

(3) 當 $t\to\infty$，何者會產生無窮大的解? (4%)

(a) $y(t)=c_1e^{(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2})t}+c_2e^{(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2})t}$

(b) $y(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$

(a) $y(t)=c_1e^{-3t}+c_2e^{-5t}$

(1) 當 $t\to\infty$，(b)的解會產生週期性振動

(2) 當 $t\to\infty$，(c)的解會衰減到零

(3) 當 $t\to\infty$，(a)的解變成無窮大

2. 已知線性微分方程 $x^2y''(x)+axy'(x)+by(x)=x\ln x$ **有兩個補解** x **與** $x\ln x$

(1) 試求常數 a 與 b 為何? (8%)

(2) 試求此微分方程之通解。 (7%)

(1) 由補解可知其特徵方程式所得之結果為 $m=1$(重根)

故可得其特徵方程為 $(m-1)^2=0 \quad \Rightarrow m^2-2m+1=0$

$$\Rightarrow m(m-1)-m+1=0$$

$$\Rightarrow [m(m-1)-m+1]x^m=0$$

可反推其齊次微分方程為 $x^2y''(x)-xy'(x)+y(x)=0$

$\therefore \quad a=-1,\ b=1$

故此微分方程為 $x^2y''(x)-xy'(x)+y(x)=x\ln x$

(2) 由參數變異法可令其特解 $y_p=u_1x+u_2x\ln x$

$$W=\begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x+1 \end{vmatrix}=x$$

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & x\ln x \\ \frac{x\ln x}{x^2} & \ln x+1 \end{vmatrix}}{W}=\frac{-(\ln x)^2}{x} \quad \Rightarrow u_1=-\frac{(\ln x)^3}{3}$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{x\ln x}{x^2} \end{vmatrix}}{W}=\frac{\ln x}{x} \quad \Rightarrow u_2=\frac{(\ln x)^2}{2}$$

$\therefore \quad y_p = -\dfrac{(\ln x)^3}{3}\cdot x + \dfrac{(\ln x)^2}{2}\cdot x\ln x = \dfrac{x(\ln x)^3}{6}$

通解 $y = y_h + y_p = c_1 x + c_2 x\ln x + \dfrac{x(\ln x)^3}{6}$

3. 試求下述微分方程之通解

(1) $y^{(4)} - 2y'' + y = 16e^t$ **(8%)**

(2) $x^2 y'' + xy' - y = \ln x$ **(8%)**

(3) $x(1-x)y'' + 2(1-2x)y' - 2y = 6x - 2$ **(8%)**

(1) $y^{(4)} - 2y'' + y = 16e^t$

令 $y = e^{\lambda t}$ 可得 $\lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow (\lambda^2 - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1$ (重根)

$\therefore \quad y_h = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^t + c_4 t e^t$

令 $y_p = At^2 e^t \quad \Rightarrow y_p' = A2te^t + At^2 e^t = A(2t + t^2)e^t$

$\Rightarrow y_p'' = A(2+2t)e^t + A(2t + t^2)e^t = A(2 + 4t + t^2)e^t$

$\Rightarrow y_p''' = A(4+2t)e^t + A(2 + 4t + t^2)e^t = A(6 + 6t + t^2)e^t$

$\Rightarrow y_p^{(4)} = A(6+2t)e^t + A(6 + 6t + t^2)e^t = A(12 + 8t + t^2)e^t$

代回 ODE 可得

$A(12 + 8t + t^2)e^t - 2A(2 + 4t + t^2)e^t + At^2 e^t = 16e^t \quad \Rightarrow 8Ae^t = 16e^t$

$\Rightarrow A = 2$

$\therefore \quad y_p = 2t^2 e^t$

$y = y_h + y_p = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^t + c_4 t e^t + 2t^2 e^t$

(2) $x^2 y'' + xy' - y = \ln x$

令 $y = x^m$ 代入 ODE 可得

$[m(m-1) + m - 1]x^m = 0 \quad \Rightarrow m^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow m = 1 \text{ or } -1$

$\therefore \quad y_h = c_1 x + c_2 x^{-1}$

使用參數變異法來求其特解

令特解 $y_p(x) = u_1 x + u_2 x^{-1}$

$$W=\begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix}=-2x^{-1}$$

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-1} \\ x^{-2}\ln x & -x^{-2} \end{vmatrix}}{W}=\frac{-x^{-3}\ln x}{-2x^{-1}}=\frac{1}{2}x^{-2}\ln x \quad \Rightarrow u_1=-\frac{1}{2x}(\ln x+1)$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x^{-2}\ln x \end{vmatrix}}{W}=\frac{x^{-1}\ln x}{-2x^{-1}}=-\frac{1}{2}\ln x \quad \Rightarrow u_2=-\frac{1}{2}(x\ln x-x)$$

$$\therefore \quad y_p(x)=u_1x+u_2x^{-1}=-\frac{1}{2x}(\ln x+1)\cdot x-\frac{1}{2}(x\ln x-x)\cdot x^{-1}=-\ln x$$

通解 $y=y_h(x)+y_p(x)=c_1x+c_2x^{-1}-\ln x$

(3) $x(1-x)y''+2(1-2x)y'-2y=6x-2$

令 $a_2=x(1-x)$，$a_1=2(1-2x)$，$a_0=-2$

由判斷式：$a_2''-a_1'+a_0=-2+4-2=0$ 可知此為正合式

$$x(1-x)y''+2(1-2x)y'-2y=\frac{d}{dx}[b_1(x)y'+b_0(x)y]$$

$$\Rightarrow b_1(x)y''+[b_1'(x)+b_0(x)]+b_0'(x)y=x(1-x)y''+2(1-2x)y'-2y$$

$$\therefore \quad b_1=x(1-x),\ b_0=-b_1'+2(1-2x)=-1+2x+2-4x=1-2x$$

$$\therefore \quad x(1-x)y''+2(1-2x)y'-2y=\frac{d}{dx}[x(1-x)y'+(1-2x)y]=6x-2$$

$$\Rightarrow x(1-x)y'+(1-2x)y=3x^2-2x+c_1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[x(1-x)y]=3x^2-2x+c_1$$

$$\Rightarrow x(1-x)y=x^3-x^2+c_1x+c_2$$

$$\Rightarrow y=-x+c_1\frac{1}{1-x}+c_2\frac{1}{x(1-x)}$$

4. 已知一微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{d}{dx}(\dfrac{y}{x})+\dfrac{2y}{x^2}=x^{-2}$ **(**$x>0$**)**

(1) 試求此微分方程的補解$y_h(x)=?$ **(6%)**

(2) 以變數變換，令$t=\ln x$**，則** $y(x)=Y(t)$ **，試求轉換後以**$Y(t)$**表示的微分方程式。 (6%)**

(3) 試求轉換後微分方程的補解$Y_h(t)=?$ **(6%)**

(4) 試求轉換後微分方程的特解$Y_p(t)=?$ **(6%)**

(5) 試將$Y(t)$**轉換回** $y(x)$ **。 (3%)**

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d}{dx}(\frac{y}{x})+\frac{2y}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow y''+\frac{1}{x}y'-\frac{y}{x^2}+\frac{2}{x^2}y=x^{-2}$

$\Rightarrow x^2y''+xy'+y=1$

$\therefore$ 此為 Euler ODE

令 $y=x^m$

$m(m-1)x^m+mx^m+x^m=0$

$\Rightarrow m^2+1=0$

$\Rightarrow m=i,-i$

$\therefore \quad y_h=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)$

(2) 令 $t=\ln x \Rightarrow x=e^t$

$\therefore y(x)=y(e^t)=Y(t)$

$y'(x)=\frac{dy(x)}{dx}=\frac{dY(t)}{dx}=\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dY(t)}{dt}=\frac{1}{x}Y'(t)$

$y''(x)=\frac{dy'(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}Y'(t))=-\frac{1}{x^2}Y'(t)+\frac{1}{x}\frac{dY'(t)}{dx}=\frac{1}{x^2}[Y''(t)-Y'(t)]$

將 $y'(x)$ 與 $y''(x)$ 代回 ODE 可得 $\Rightarrow x^2y''+xy'+y=1$

$x^2\cdot\frac{1}{x^2}[Y''(t)-Y'(t)]+x\cdot\frac{1}{x}Y'(t)+Y(t)=1$

$\Rightarrow Y''(t)+Y(t)=1$

(3) $\because$ 此為常係數 ODE

$\therefore$ 令 $Y(t)=e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

$(\lambda^2+1)e^{\lambda x}=0$

$\Rightarrow \lambda^2+1=0$

$\Rightarrow \lambda=i,-i$

$\therefore \quad Y_h=c_1\cos t+c_2\sin t$

(4) 由待定係數法，令 $Y_P=A$ 代回 ODE 可得 $A=1$

$\therefore \quad Y_P=1$

(5) $Y(t)=Y_h(t)+Y_p(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+1$

$\Rightarrow y(x)=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)+1$

5. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$，若給定質量塊 $m=4$，阻尼係數 $c=0$ 與彈簧常數 $k=36$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0)=0$ 與 $\dot{y}(0)=0$，給一外力為 $f(t)=\cos\omega t$

試問:

(1) 當 $\omega=?$，此系統會產生共振行為。 (4%)

(2) 當系統產生共振時，此時其解為何? (8%)

(1) $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$ 又 $m=4$，$c=0$，$k=36$ 與 $f(t)=\cos\omega t$

$\therefore\ 4\ddot{y}(t)+36y(t)=\cos\omega t$

$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=3$

當 $\omega=\omega_n=3$ 時，系統會產生共振現象。

(2) $4\ddot{y}(t)+36y(t)=\cos 3t$

令 $y(t)=e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

$(4\lambda^2+36)e^{\lambda x}=0$

$\Rightarrow \lambda^2+9=0$

$\Rightarrow \lambda=3i,-3i$

$\therefore\ y_h=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t$

令 $y_p=t(A\cos 3t+B\sin 3t)=t\cdot y_h$

$\dot{y}_p=y_h+t\,\dot{y}_h$

$\ddot{y}_p=\dot{y}_h+\dot{y}_h+t\,\ddot{y}_h=2\dot{y}_h+t\,\ddot{y}_h$ 代回 ODE 可得

$4(2\dot{y}_h+t\cdot\ddot{y}_h)+36t\cdot y_h=\cos 3t$

$\Rightarrow 8\dot{y}_h=\cos 3t$

$\Rightarrow 24(-A\sin 3t+B\cos 3t)=\cos 3t$

$\therefore\ A=0$，$B=\frac{1}{24}$

$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t+\frac{1}{24}t\cdot\sin 3t$

又 $y(0)=0 \quad \Rightarrow c_1=0$

$\dot{y}(0)=0 \quad \Rightarrow c_2=0$

$\therefore\ y(t)=\frac{1}{24}t\cdot\sin 3t$

6. 已知微分方程式 $x^2y''-(x^2+2x)y'+(x+2)y=0$

(1) 試以觀察法求一補解 y_1。 (3%)

(2) 試求其通解。 (7%)

(1) 由 $y=x^m$ 可觀察出當 $m=1$ 為其一解

$\therefore\ y_1=x$

(2) $x^2y''-(x^2+2x)y'+(x+2)y=0 \quad \Rightarrow y''-(1+\frac{2}{x})y'+(\frac{x+2}{x^2})y=0$

$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2$

且滿足 $W' - (1+\frac{2}{x})W = 0 \quad \Rightarrow \frac{W'}{W} = 1 + \frac{2}{x}$

$$\Rightarrow \ln W = \int (1+\frac{2}{x})dx = x + 2\ln x + \bar{c}_1$$

$$\Rightarrow W = e^{x+2\ln x+\bar{c}_1} = c_1 x^2 e^x$$

$\therefore \quad y_1 y_2' - y_1' y_2 = c_1 x^2 e^x$

$\Rightarrow x y_2' - y_2 = c_1 x^2 e^x$

$\Rightarrow y_2' - \frac{1}{x} y_2 = c_1 x e^x$ ⟶ 為一階線性 ODE

積分因子為 $\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

同乘積分因子後可得 $\frac{1}{x} y_2' - \frac{1}{x^2} y_2 = c_1 e^x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{x} y_2) = c_1 e^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} y_2 = c_1 e^x + c_2$$

$$\Rightarrow y_2 = c_1 x e^x + c_2 x$$

故可得其另一補解為 xe^x