

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求： A^{-1} (10%)

2. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 7 \\ 0 & 3 & \beta \\ 0 & \beta & 3 \end{bmatrix}$ 且 β 為實數

試問：若要使 A^{-1} 存在，則 β 不可為何值？ (10%)

3. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ，試求：

(1) $\det(3A^T) = ?$ (2) $\det(B^T) = ?$ (3) $\det(AB) = ?$ (4) $(AB)^{-1} = ?$ (20%)

4. (1) 給一矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ a & b \end{bmatrix}$ ，試求 a, b 使得矩陣 A 有特徵向量 $\mathbf{x}_1 = \{3, 1\}^T$ ，

$\mathbf{x}_2 = \{2, 1\}^T$ (10%)

(2) 試找出一矩陣 B ，使得 B 與 A 有相同之特徵向量，並且其特徵值為

$\lambda_1 = 1$ 與 $\lambda_2 = 2$ 。 (5%)

(3) 試求 $B^{10} = ?$ (5%)

5. 給方程式 $4x_1^2 + 12x_1x_2 + 4x_2^2 = 16$ ，試問此二次式代表何種圓錐曲線？ (10%)

(請將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$ 轉換至新座標向量

$\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2]$)

6. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ ，試問：

(1) A 的特徵方程為何？ (4%)

(2) $A^{10} - 2A^9 - 3A^2 - 3I = ?$ (8%)

(3) 若 $A^{-1} = pA^2 + qA + rI$ ，則 $p = ?$ ， $q = ?$ ， $r = ?$ (8%)

7. 試解： $\frac{dx}{dt} = Ax + z$ 其中 $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ， $z = \begin{Bmatrix} -6e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{Bmatrix}$ 。 (10%)