國立臺灣海洋大學河海工程學系 2018 工程數學(一) 期末考參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\-1&2&0&1\end{bmatrix}$，試求: A^{-1} (10%)

2. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}\beta&0&7\\0&3&\beta\\0&\beta&3\end{bmatrix}$ 且 β 為實數

   試問: 若要使 A^{-1} 存在，則 β 不可為何值? (10%)

3. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&3\\6&3\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\dfrac{1}{8}\begin{bmatrix}-2&5\\-2&1\end{bmatrix}$，試求:

   (1) $\det(3A^T)=?$ (2) $\det(B^T)=?$ (3) $\det(AB)=?$ (4) $(AB)^{-1}=?$ (20%)

4. (1) 給一矩陣 $A=\begin{bmatrix}2&6\\a&b\end{bmatrix}$，試求 a, b 使得矩陣 A 有特徵向量 $\mathbf{x}_1=\{3,1\}^T$, $\mathbf{x}_2=\{2,1\}^T$ (10%)

   (2) 試找出一矩陣 B，使得 B 與 A 有相同之特徵向量，並且其特徵值為 $\lambda_1=1$ 與 $\lambda_2=2$。 (5%)

   (3) 試求 $B^{10}=?$ (5%)

5. 給方程式 $4x_1^2+12x_1x_2+4x_2^2=16$，試問此二次式代表何種圓錐曲線? (10%)
   (請將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T=[y_1\ y_2]$)

6. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&-6&4\end{bmatrix}$，試問:

   (1) A 的特徵方程為何? (4%)

   (2) $A^{10}-2A^9-3A^2-3I=?$ (8%)

   (3) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$，則 $p=?$, $q=?$, $r=?$ (8%)

7. 試解: $\dfrac{dx}{dt}=Ax+z$ 其中 $A=\begin{bmatrix}-3&1\\1&-3\end{bmatrix}$, $z=\begin{Bmatrix}-6e^{-2t}\\2e^{-2t}\end{Bmatrix}$。 (10%)

參考解答:

1. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\-1&2&0&1\end{bmatrix}$，試求: A^{-1} (10%)

$\det(A)=8$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2&0&0&2\\12&8&0&-4\\0&0&4&0\\-6&0&0&2\end{bmatrix}^T=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2&12&0&-6\\0&8&0&0\\0&0&4&0\\2&-4&0&2\end{bmatrix}^T=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&6&0&-3\\0&4&0&0\\0&0&2&0\\1&-2&0&1\end{bmatrix}$$

2. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}\beta&0&7\\0&3&\beta\\0&\beta&3\end{bmatrix}$ 且 β 為實數

試問: 若要使 A^{-1} 存在，則 β 不可為何值? (10%)

A^{-1} 存在即 $\det(A)\neq 0$

$$\begin{vmatrix}\beta&0&7\\0&3&\beta\\0&\beta&3\end{vmatrix}=\beta(\beta+3)(\beta-3)\neq 0$$

$\therefore$ β 不可是 0, 3 或是 -3

3. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&3\\6&3\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-2&5\\-2&1\end{bmatrix}$，試求:

(1) $\det(3A^T)=?$ **(2)** $\det(B^T)=?$ **(3)** $\det(AB)=?$ **(4)** $(AB)^{-1}=?$ **(20%)**

(1) $\det(A)=\begin{vmatrix}2&3\\6&3\end{vmatrix}=-12$

$\det(3A^T)=\det(3A)=3^2\cdot\det(A^T)=9\cdot(-12)=-108$

(2) $\det(B^{-1})=\begin{vmatrix}-\frac{2}{8}&\frac{5}{8}\\-\frac{2}{8}&\frac{1}{8}\end{vmatrix}=\frac{1}{8}$

$BB^{-1}=I \quad \Rightarrow \det(BB^{-1})=\det(I) \quad \Rightarrow \det(B)\cdot\det(B^{-1})=1 \quad \Rightarrow \det(B)=8$

$\det(B^T)=\det(B)=8$

(3) $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)=-96$

(4) $A=\begin{bmatrix}2&3\\6&3\end{bmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}3&-3\\-6&2\end{bmatrix}$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=-\frac{1}{96}\begin{bmatrix}-2 & 5\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -3\\ -6 & 2\end{bmatrix}$$
$$=-\frac{1}{96}\begin{bmatrix}-36 & 16\\ -12 & 8\end{bmatrix}=-\frac{1}{24}\begin{bmatrix}-9 & 4\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

4. (1) 給一矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ a & b\end{bmatrix}$，試求 a, b 使得矩陣 A 有特徵向量 $\mathbf{x}_1=\{3,1\}^T$, $\mathbf{x}_2=\{2,1\}^T$ (10%)

(2) 試找出一矩陣 B，使得 B 與 A 有相同之特徵向量，並且其特徵值為 $\lambda_1=1$ 與 $\lambda_2=2$。 (5%)

(3) 試求 $B^{10}=?$ (5%)

(1) $|A-\lambda_1 I|\,\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}2-\lambda_1 & 6\\ a & b-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}3\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\quad\Rightarrow\lambda_1=4$

$|A-\lambda_2 I|\,\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}2-\lambda_2 & 6\\ a & b-\lambda_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\quad\Rightarrow\lambda_2=5$

$\therefore\ \begin{cases}3a+b-4=0\\ 2a+b-5=0\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=7\end{cases}$

(2) $BS=SD\quad\Rightarrow B=SDS^{-1}$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

(3) $B^{10}=SD^{10}S^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{10} & 0\\ 0 & 2^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2045 & 6138\\ -1023 & 3070\end{bmatrix}$$

5. 給方程式 $4x_1^2+12x_1x_2+4x_2^2=16$，試問此二次式代表何種圓錐曲線? (10%)
(請將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T=[y_1\ y_2]$)

$4x_1^2+12x_1x_2+4x_2^2=16\quad\Rightarrow\mathbf{x}^T\begin{bmatrix}4 & 6\\ 6 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x}=16$ 　其中 $\mathbf{x}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}$

由 $|A-\lambda I|=0\quad\Rightarrow\begin{vmatrix}4-\lambda & 6\\ 6 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow\lambda=10\ \text{or}\ -2$

當 $\lambda=10$ 時，$\begin{bmatrix}-6 & 6\\ 6 & -6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\quad\Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$

當 $\lambda=-2$ 時，$\begin{bmatrix}6&6\\6&6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}$

$\therefore\ s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix} \Rightarrow s^{-1}=s^T=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

令 $y=s^Tx$

$$x^T\begin{bmatrix}4&6\\6&4\end{bmatrix}x=16 \quad \Rightarrow x^Ts\begin{bmatrix}10&0\\0&-2\end{bmatrix}s^Tx=16$$

$$\Rightarrow y^T\begin{bmatrix}10&0\\0&-2\end{bmatrix}y=16$$

$$\Rightarrow 10y_1^2-2y_2^2=16$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{1.6}-\frac{y_2^2}{8}=1$$

$\therefore$ 此為雙曲線

6. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&-6&4\end{bmatrix}$，試問:

(1) A 的特徵方程為何? (4%)

(2) $A^{10}-2A^9-3A^2-3I=$? (8%)

(3) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ ，則 $p=?$，$q=?$，$r=?$ (8%)

(1) $|A-\lambda I|=0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\0&-1-\lambda&1\\0&-6&4-\lambda\end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow \lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1,1,2$$

(2) 由 Cayley-Hamilton 定理可知: $A^3-4A^2+5A-2I=0$

$A^{10}-2A^9-3A^2-3I=Q(A)\cdot(A^3-4A^2+5A-2I)+pA^2+qA+rI$

$\Rightarrow \lambda^{10}-2\lambda^9-3\lambda^2-3=Q(\lambda)\cdot(\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2)+p\lambda^2+q\lambda+r$

代入 $\lambda=2$ 可得 $-15=4p+2q+r \quad \ldots(1)$

代入 $\lambda=1$ 可得 $-7=p+q+r \quad \ldots(2)$

微分後代入 $\lambda=1$ 可得 $-14=2p+q \quad \ldots(3)$

解聯立後可得 $p=6$，$q=-26$，$q=13$

$$\therefore A^{10}-2A^9-3A^2-3I=6A^2-26A+13I=\begin{bmatrix}-7&-88&16\\0&9&-8\\0&48&-31\end{bmatrix}$$

(3) $A^3-4A^2+5A-2I=0 \quad \Rightarrow A^{-1}(A^3-4A^2+5A-2I)=0$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}A^2-2A+\frac{5}{2}I=\begin{bmatrix}1 & -7 & \frac{3}{2}\\ 0 & 2 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 3 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

7. 試解: $\dfrac{dx}{dt}=Ax+z$ **其中** $A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix},\ z=\begin{Bmatrix}-6e^{-2t}\\ 2e^{-2t}\end{Bmatrix}$ 。 **(10%)**

$$\det(A-\lambda I)=0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(4+\lambda)(2+\lambda)=0 \ \Rightarrow \lambda=-4 \text{ or } -2$$

當 $\lambda=-4 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^2=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$

當 $\lambda=-2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \quad \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$

$$\therefore \quad A=SDS^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

令 $x=Sy \quad \Rightarrow S\dfrac{dy}{dt}=ASy+z \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dt}=S^{-1}ASy+S^{-1}z$

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}-6e^{-2t}\\ 2e^{-2t}\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{y}_1=-4y_1-4e^{-2t}\\ \dot{y}_2=-2y_2-2e^{-2t}\end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases}y_1=c_1e^{-4t}-2e^{-2t}\\ y_2=c_2e^{-2t}-2te^{-2t}\end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}y_1+y_2\\ -y_1+y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}c_1e^{-4t}+c_2e^{-2t}-2e^{-2t}-2te^{-2t}\\ -c_1e^{-4t}+c_2e^{-2t}+2e^{-2t}-2te^{-2t}\end{Bmatrix}$$