

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

- 已知二階線性常微分方程式 $L(y) = f(t)$ 在不同起始條件下，解函數可以是 $\Psi_1 = e^t + 2e^{t^2}$ 、 $\Psi_2 = e^t + te^{t^2}$ 、 $\Psi_3 = e^t + (1+t)e^{t^2}$ ，是問此系統其在起始條件 $y(0) = 3$ 、 $y'(0) = 0$ 下之解。(8%)
- 考慮下述三條微分方程式
 - $y''(t) + 4y(t) = 0$
 - $y''(t) - 4y(t) = 0$
 - $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$
 - $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$
 - $y''(t) + 4y'(t) - 4y(t) = 0$
 - $y''(t) - 4y'(t) - 4y(t) = 0$
 試問：(1) 當 $t \rightarrow \infty$ ，何者會產生週期性振動的解？(4%)
 (2) 當 $t \rightarrow \infty$ ，何者的解會衰減到零？(4%)
 (3) 當 $t \rightarrow \infty$ ，何者會產生無窮大的解？(4%)
- $(\frac{x}{2} + 2x^3)$ ， $(2x^3 + \frac{1}{x})$ 與 $(\frac{4}{x} + 2x^3 + \frac{x}{8})$ 為線性常微分方程式 $x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$ 的三個解，試求 $a(x)$ ， $b(x)$ 與 $g(x)$ 。(9%) (107 中興土木甲組)
- 已知齊次式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 有一解為 $(1+x)^2$ 並且其 Wronskian 行列式恆為常數，試問：
 - 另一補解為何？(6%)
 - $y'' + p(x)y' + q(x)y = 1+x$ 之解為何？(6%)
- 試求下述微分方程之通解
 - $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 16e^{2t}$ (8%)
 - $x(x-1)y'' + (3x-2)y' + y = x^{-2}$ (8%)
- 已知一微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 6\frac{d}{dx}(\frac{y}{x}) + \frac{12y}{x^2} = x^{-4}$ ($x > 0$)
 - 試求此微分方程的補解 $y_h(x) = ?$ (6%)
 - 以變數變換，令 $t = \ln x$ ，則 $y(x) = Y(t)$ ，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。(6%)
 - 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t) = ?$ (6%)
 - 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t) = ?$ (6%)
 - 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$ 。(3%)
- 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$ ，若給定質量塊 $m = 4$ ，阻尼係數 $c = 0$ 與彈簧常數 $k = 4$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0) = 0$ 與 $\dot{y}(0) = 0$ ，給一外力為 $f(t) = \sin \omega t$ ，試問：
 - 當 $\omega = 1$ ，其解為何？(6%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼？(2%)
 - 當 $\omega = 2$ ，其解為何？(6%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼？(2%)