國立臺灣海洋大學河海工程學系 2018 工程數學(一) 第二次大考參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 已知二階線性常微分方程式 $L(y) = f(t)$ 在不同起始條件下，解函數可以是 $\Psi_1 = e^t + 2e^{t^2}$、$\Psi_2 = e^t + te^{t^2}$、$\Psi_3 = e^t + (1+t)e^{t^2}$，是問此系統其在起始條件 $y(0) = 3$、$y'(0) = 0$ 下之解。 (8%)

2. 考慮下述三條微分方程式

   (a) $y''(t) + 4y(t) = 0$　(c) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$　(e) $y''(t) + 4y'(t) - 4y(t) = 0$

   (b) $y''(t) - 4y(t) = 0$　(d) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0$　(f) $y''(t) - 4y'(t) - 4y(t) = 0$

   試問: (1) 當 $t \to \infty$，何者會產生週期性振動的解? (4%)

   (2) 當 $t \to \infty$，何者的解會衰減到零? (4%)

   (3) 當 $t \to \infty$，何者會產生無窮大的解? (4%)

3. $(\frac{x}{2} + 2x^3)$, $(2x^3 + \frac{1}{x})$ 與 $(\frac{4}{x} + 2x^3 + \frac{x}{8})$ 為線性常微分方程式

   $$x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$$

   的三個解，試求 $a(x)$, $b(x)$ 與 $g(x)$。 (9%)　(107 中興土木甲組)

4. 已知齊次式 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 有一解為 $(1+x)^2$ 並且其 Wronskian 行列式恆為常數，試問:

   (1) 另一補解為何? (6%)

   (2) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 1 + x$ 之解為何? (6%)

5. 試求下述微分方程之通解

   (1) $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 16e^{2t}$　(8%)

   (2) $x(x-1)y'' + (3x-2)y' + y = x^{-2}$　(8%)

6. 已知一微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{d}{dx}(\frac{y}{x}) + \frac{12y}{x^2} = x^{-4}$　$(x > 0)$

   (1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x) = ?$ (6%)

   (2) 以變數變換，令 $t = \ln x$，則 $y(x) = Y(t)$，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (6%)

   (3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t) = ?$ (6%)

   (4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t) = ?$ (6%)

   (5) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$。 (3%)

7. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$，若給定質量塊 $m = 4$，阻尼係數 $c = 0$ 與彈簧常數 $k = 4$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0) = 0$ 與 $\dot{y}(0) = 0$，給一外力為 $f(t) = \sin\omega t$，試問:

   (1) 當 $\omega = 1$，其解為何?(6%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼?(2%)

   (2) 當 $\omega = 2$，其解為何?(6%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼?(2%)

參考解答:

1. 已知二階線性常微分方程式 $L(y)=f(t)$ 在不同起始條件下，解函數可以是 $\Psi_1=e^t+2e^{t^2}$、$\Psi_2=e^t+te^{t^2}$、$\Psi_3=e^t+(1+t)e^{t^2}$，是問此系統其在起始條件 $y(0)=3$、$y'(0)=0$ 下之解。 (8%)

二階線性 ODE 其解可表示為 $y=y_h+y_p=c_1y_1+c_2y_2+y_p$

$\therefore$ 可知 $y_1=e^{t^2}$，$y_2=te^{t^2}$，$y_p=e^t$

故此 ODE 之解可表示為 $y=c_1e^{t^2}+c_2te^{t^2}+e^t$

由初始條件 $y(0)=3 \Rightarrow c_1=2$

$y'(0)=0 \Rightarrow c_2=-1$

$\therefore \ y=2e^{t^2}-te^{t^2}+e^t$

2. 考慮下述三條微分方程式

(a) $y''(t)+4y(t)=0$ **(c)** $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=0$ **(e)** $y''(t)+4y'(t)-4y(t)=0$

(b) $y''(t)-4y(t)=0$ **(d)** $y''(t)-4y'(t)+4y(t)=0$ **(f)** $y''(t)-4y'(t)-4y(t)=0$

試問: (1) 當 $t\to\infty$，何者會產生週期性振動的解? (4%)

(2) 當 $t\to\infty$，何者的解會衰減到零? (4%)

(3) 當 $t\to\infty$，何者會產生無窮大的解? (4%)

令 $y=e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

(a) $\lambda=\pm 2i \quad \Rightarrow y(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$

(b) $\lambda=\pm 2 \quad \Rightarrow y(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$

(c) $\lambda=-2,-2 \quad \Rightarrow y(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}$

(d) $\lambda=2,2 \quad \Rightarrow y(t)=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$

(e) $\lambda=-2\pm 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow y(t)=c_1e^{(-2+2\sqrt{2})t}+c_2e^{(-2-2\sqrt{2})t}$

(f) $\lambda=2\pm 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow y(t)=c_1e^{(2+2\sqrt{2})t}+c_2e^{(2-2\sqrt{2})t}$

(1) 當 $t\to\infty$，(a)的解會產生週期性振動

(2) 當 $t\to\infty$，(c)的解會衰減到零

(3) 當 $t\to\infty$，(b)(d)(e)(f)的解變成無窮大

3. $(\frac{x}{2}+2x^3)$，$(2x^3+\frac{1}{x})$ **與** $(\frac{4}{x}+2x^3+\frac{x}{8})$ **為線性常微分方程式**

$$x^2y''+a(x)y'+b(x)y=g(x)$$

的三個解，試求$a(x)$，$b(x)$**與**$g(x)$**。 (9%)** **(107 中興土木甲組)**

$\because$ $\frac{x}{2}+2x^3$ 、$2x^3+\frac{1}{x}$與$\frac{4}{x}+2x^3+\frac{x}{8}$為微分方程的 3 個解

$\therefore$分別將 $y=\frac{x}{2}+2x^3$ 、$2x^3+\frac{1}{x}$與$\frac{4}{x}+2x^3+\frac{x}{8}$代入 ODE 可得

$$y=\frac{x}{2}+2x^3 \quad \Rightarrow 12x^3+a\cdot(\frac{1}{2}+6x^2)+b\cdot(\frac{x}{2}+2x^3)=g \text{ .....(1)}$$

$$y=2x^3+\frac{1}{x} \quad \Rightarrow (12x+\frac{2}{x^3})\cdot x^2+a\cdot(6x^2-\frac{1}{x^2})+b\cdot(2x^3+\frac{1}{x})=g \text{ .....(2)}$$

$$y=\frac{4}{x}+2x^3+\frac{x}{8} \quad \Rightarrow (\frac{8}{x^3}+12x)\cdot x^2+a\cdot(-\frac{4}{x^2}+6x^2+\frac{1}{8})+b\cdot(\frac{4}{x}+2x^3+\frac{x}{8})=g \text{ .....(3)}$$

由(1)與(2)可得 $\frac{2}{x}-a\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2})+b\cdot(-\frac{x}{2}+\frac{1}{x})=0$ .....(4)

由(1)與(3)可得 $\frac{8}{x}-a\cdot(\frac{3}{8}+\frac{4}{x^2})+b\cdot(-\frac{3x}{8}+\frac{4}{x})=0$ .....(5)

由 $(4)\cdot(-\frac{3x}{8}+\frac{4}{x})-(5)\cdot(-\frac{x}{2}+\frac{1}{x})$ 可得 $\frac{13}{4}-a\cdot\frac{13}{4x}=0 \quad \Rightarrow a=x$

代回(4)可得 $b=-1$

將 $a=x$ 與 $b=-1$ 代回(1)可得 $g=16x^3$

4. **已知齊次式** $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ **有一解為** $(1+x)^2$ **並且其 Wronskian 行列式恆為常數，試問:**

(1) 另一補解為何? (6%)

(2) $y''+p(x)y'+q(x)y=1+x$ **之解為何? (6%)**

(1) $\because$ Wronskian 行列式恆為常數

$$\therefore \; W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=K \quad \Rightarrow y_1y_2'-y_1'y_2=K$$

又已知 ODE 有一解為 $y_1=(1+x)^2$

故可得 $y_2'-\frac{2}{1+x}y_2=\frac{K}{(1+x)^2}$

此為一階線性 ODE，可知其積分因子為 $\mu=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int\frac{2}{1+x}dx}=\frac{1}{(1+x)^2}$

同乘積分因子後可得 $\frac{1}{(1+x)^2}y_2'-\frac{2}{(1+x)^3}y_2=\frac{K}{(1+x)^4}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(1+x)^2}y_2\right]=\frac{K}{(1+x)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2}y_2=-\frac{1}{3}\frac{K}{(1+x)^3}$$

$$\Rightarrow y_2=-\frac{K}{3(1+x)}$$

故可知另一補解為 $\frac{1}{1+x}$ (取 $K=-3$)

(2) 由參數變異法，令 $y_p=u_1y_1+u_2y_2$

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{(1+x)} \\ 1+x & -\frac{1}{(1+x)^2}\end{vmatrix}}{W} \quad \Rightarrow u_1'=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow u_1=\frac{x}{3}$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix} (1+x)^2 & 0 \\ 2(1+x) & 1+x\end{vmatrix}}{W} \quad \Rightarrow u_2'=-\frac{(1+x)^3}{3} \quad \Rightarrow u_2=-\frac{(1+x)^4}{12}$$

$$y_p=\frac{x}{3}(1+x)^2-\frac{(1+x)^4}{12}\cdot\frac{1}{(1+x)}=\frac{x(1+x)^2}{3}-\frac{(1+x)^3}{12}$$

5. 試求下述微分方程之通解

(1) $y^{(4)}-8y''+16y=16e^{2t}$ **(8%)**

(2) $x(x-1)y''+(3x-2)y'+y=x^{-2}$ **(8%)**

(1) $y^{(4)}-8y''+16y=16e^{t}$

令 $y=e^{\lambda t}$ 可得 $\lambda^4-8\lambda^2+16\lambda=0 \quad \Rightarrow (\lambda^2-4)^2=0$

$\Rightarrow \lambda=\pm 2$ (重根)

$\therefore \; y_h=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+c_3e^{2t}+c_4te^{2t}$

令 $y_p=At^2e^{2t} \quad \Rightarrow y_p'=A2te^{2t}+A2t^2e^{2t}=A(2t+2t^2)e^{2t}$

$$\Rightarrow y_p''=A(2+4t)e^{2t}+A(2t+2t^2)\cdot 2e^{2t}=A(2+8t+4t^2)e^{2t}$$

$$\Rightarrow y_p'''=A(8+8t)e^{2t}+A(2+8t+4t^2)\cdot 2e^{2t}=A(12+24t+8t^2)e^{2t}$$

$$\Rightarrow y_p^{(4)}=A(24+16t)e^{2t}+A(12+24t+8t^2)\cdot 2e^{2t}=A(48+64t+16t^2)e^{2t}$$

代回 ODE 可得

$$A(48+64t+16t^2)e^{2t}-8A(2+8t+4t^2)e^{2t}+16At^2e^{2t}=16e^{2t} \quad \Rightarrow 32Ae^{2t}=16e^{2t}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad y_p=\frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

$$y=y_h+y_p=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+c_3e^{2t}+c_4te^{2t}+\frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

(2) $x(x-1)y''+(3x-2)y'+y=x^{-2}$

令 $a_2=x(x-1)$，$a_1=3x-2$，$a_0=1$

由判斷式：$a_2''-a_1'+a_0=2-3+1=0$ 可知此為正合式

$$x(x-1)y''+(3x-2)y'+y=\frac{d}{dx}[b_1(x)y'+b_0(x)y]$$

$$\Rightarrow b_1(x)y''+[b_1'(x)+b_0(x)]+b_0'(x)y=x(x-1)y''+(3x-2)y'+y$$

$$\therefore \quad b_1=x(x-1),\ b_0=-b_1'+3x-2=-(2x-1)+3x-2=x-1$$

$$\therefore \quad x(x-1)y''+(3x-2)y'+y=\frac{d}{dx}[x(x-1)y'+(x-1)y]=x^{-2}$$

$$\Rightarrow x(x-1)y'+(x-1)y=-\frac{1}{x}+c_1$$

$$\Rightarrow xy'+y=-\frac{1}{x(x-1)}+\frac{c_1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xy)=-\frac{1}{x(x-1)}+\frac{c_1}{x-1}$$

$$\Rightarrow xy=-\ln|x-1|+\ln|x|+c_1\ln|x-1|+c_2$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{x}\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+c_1\frac{\ln|x-1|}{x}+\frac{c_2}{x}$$

6. 已知一微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y}{x}\right)+\dfrac{12y}{x^2}=x^{-4}$ **(** $x>0$ **)**

(1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x)=?$ **(6%)**

(2) 以變數變換，令 $t=\ln x$ **，則** $y(x)=Y(t)$ **，試求轉換後以** $Y(t)$ **表示的微分方程式。 (6%)**

(3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t)=?$ **(6%)**

(4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t)=?$ **(6%)**

(5) 試將 $Y(t)$ **轉換回** $y(x)$ **。 (3%)**

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{d}{dx}(\frac{y}{x})+\frac{12y}{x^2}=x^{-4}\quad\Rightarrow y''+\frac{6}{x}y'-\frac{6y}{x^2}+\frac{12}{x^2}y=x^{-4}$

$\Rightarrow x^2y''+6xy'+6y=x^{-2}$

$\therefore$ 此為 Euler ODE

令 $y=x^m \quad \Rightarrow m(m-1)x^m+6mx^m+6x^m=0$

$\Rightarrow m^2+5m+6=0$

$\Rightarrow (m+2)(m+3)=0$

$\Rightarrow m=-2 \text{ or } -3$

$\therefore\ y_h=c_1x^{-2}+c_2x^{-3}$

(2) 令$t=\ln x \quad \Rightarrow x=e^t$

$\therefore\ y(x)=y(e^t)=Y(t)$

$y'(x)=\frac{dy(x)}{dx}=\frac{dY(t)}{dx}=\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dY(t)}{dt}=\frac{1}{x}Y'(t)$

$y''(x)=\frac{dy'(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}Y'(t))=-\frac{1}{x^2}Y'(t)+\frac{1}{x}\frac{dY'(t)}{dx}=\frac{1}{x^2}[Y''(t)-Y'(t)]$

將 $y'(x)$ 與 $y''(x)$ 代回 ODE 可得

$x^2\cdot\frac{1}{x^2}[Y''(t)-Y'(t)]+6x\cdot\frac{1}{x}Y'(t)+6Y(t)=e^{-2t}$

$\Rightarrow Y''(t)+5Y'(t)+6Y(t)=e^{-2t}$

(3) $\because$ 此為常係數 ODE

$\therefore$ 令 $Y(t)=e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

$(\lambda^2+5\lambda+6)e^{\lambda x}=0$

$\Rightarrow \lambda^2+5\lambda+6=0$

$\Rightarrow \lambda=-2 \text{ or } -3$

$\therefore\ Y_h=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$

(4) 由待定係數法，

令$Y_p=Ate^{-2t} \qquad \Rightarrow Y_p'=A(-2t+1)e^{-2t}$

$\Rightarrow Y_p''=A(4t-4)e^{-2t}$ 代回 ODE 可得 $A=1$

$\therefore\ Y_P=te^{-2t}$

(5) $Y(t)=Y_h(t)+Y_p(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+te^{-2t}$

$\Rightarrow y(x)=c_1x^{-2}+c_2x^{-3}+x^{-2}\ln x$

7. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$，若給定質量塊 $m=4$，阻尼係數 $c=0$ 與彈簧常數 $k=4$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0)=0$ 與 $\dot{y}(0)=0$，給一外力為 $f(t)=\sin\omega t$，試問:

(1) 當 $\omega=1$，其解為何?(6%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼?(2%)

(2) 當 $\omega=2$，其解為何?(6%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼?(2%)

(1) $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$ 又 $m=4$, $c=0$, $k=4$ 與 $f(t)=\sin\omega t$

$\therefore\ 4\ddot{y}(t)+4y(t)=\sin\omega t$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=1$$

當 $\omega=\omega_n=1$ 時，外力對系統產生共振行為

$$\ddot{y}(t)+y(t)=\frac{1}{4}\sin t$$

令 $y(t)=e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

$$(\lambda^2+1)e^{\lambda x}=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2+1=0$$

$$\Rightarrow \lambda=i,-i$$

$$\therefore\ y_h=c_1\cos t+c_2\sin t$$

令 $y_p=t(A\cos t+B\sin t)=t\cdot y_h$

$$\dot{y}_p=y_h+t\,\dot{y}_h$$

$\ddot{y}_p=\dot{y}_h+\dot{y}_h+t\,\ddot{y}_h=2\dot{y}_h+t\,\ddot{y}_h$ 代回 ODE 可得

$$(2\dot{y}_h+t\cdot\ddot{y}_h)+t\cdot y_h=\frac{1}{4}\sin t$$

$$\Rightarrow 2\dot{y}_h=\frac{1}{4}\sin t$$

$$\Rightarrow 2(-A\sin t+B\cos t)=\frac{1}{4}\sin t$$

$$\therefore\ A=-\frac{1}{8},\ B=0$$

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{8}t\cdot\cos t$$

又 $y(0)=0 \quad \Rightarrow c_1=0$

$\dot{y}(0)=0 \quad \Rightarrow c_2=\frac{1}{8}$

$$\therefore\ y(t)=\frac{1}{8}\sin t-\frac{1}{8}t\cdot\cos t$$

(2) 當 $\omega = 2 \neq \omega_n$ 時，外力對系統產生激發行為

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \frac{1}{4}\sin 2t$$

令 $y_p = A\cos 2t + B\sin 2t$ 代入 ODE 可得

$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t + A\cos 2t + B\sin 2t = \frac{1}{4}\sin 2t$$

$$\Rightarrow -3A\cos 2t - 3B\sin 2t = \frac{1}{4}\sin 2t$$

$$\therefore \quad A = 0,\ \ B = -\frac{1}{12}$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1\cos t + c_2\sin t - \frac{1}{12}\sin 2t$$

又 $y(0) = 0 \quad \Rightarrow c_1 = 0$

$\dot{y}(0) = 0 \quad \Rightarrow c_2 = \dfrac{1}{6}$

$$\therefore \quad y(t) = \frac{1}{6}\sin t - \frac{1}{12}\sin 2t$$