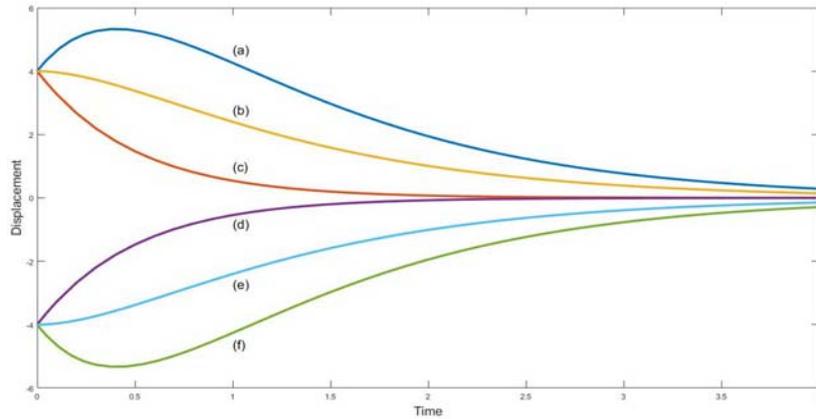


系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

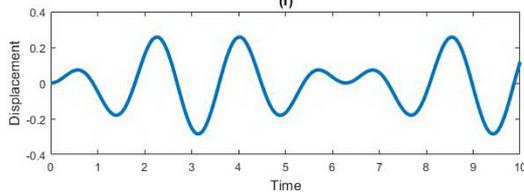
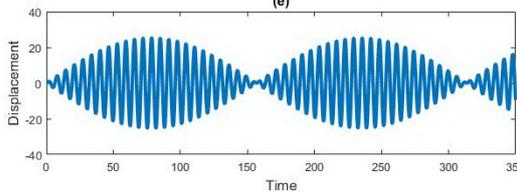
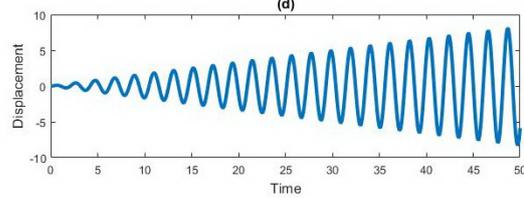
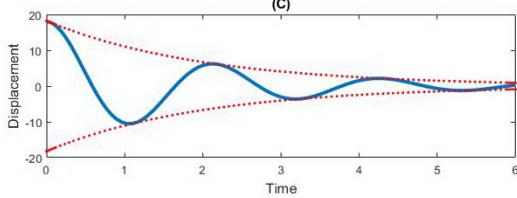
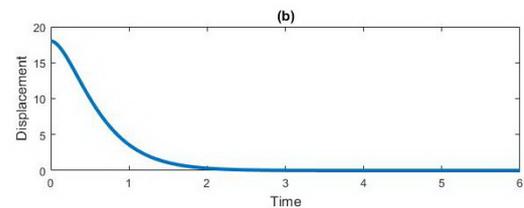
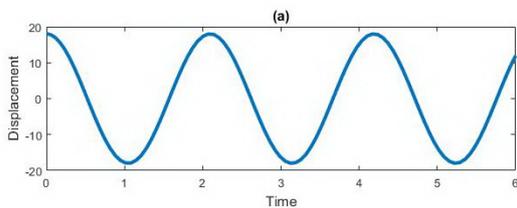
1. 給一單自由度振動系統，其控制方程式為 $m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0$ ，已知相關參數 $m=1, c=3, k=2$ ，試問不同初始條件所對應之位移圖為何？(9%)

- (1) 初始條件： $y(0) = 4, \dot{y}(0) = 0$
- (2) 初始條件： $y(0) = -4, \dot{y}(0) = 8$
- (3) 初始條件： $y(0) = -4, \dot{y}(0) = -8$



2. 考慮下述三條微分方程式，試問其所對應之位移圖為何？(9%)

- (1) $y''(t) + y'(t) + 9y(t) = 0, y(0) = 18, \dot{y}(0) = 0$
- (2) $y''(t) + 9y(t) = \cos(3t), y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$
- (3) $y''(t) + 9y(t) = 0, y(0) = 18, \dot{y}(0) = 0$



3. 給一非齊次線性微分方程如下:

$$xy''(x) + ay'(x) + \frac{b}{x}y(x) = x^{-3}$$

已知此微分方程的兩個補解為 x^{-2} 與 $x^{-2} \ln x$

- (1) 試求常數 a 、 b 為何? (4%)
- (2) 以變數變換, 令 $t = \ln x$, 則 $y(x) = Y(t)$, 試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (6%)
- (3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t) = ?$ (4%)
- (4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t) = ?$ (4%)
- (5) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$ 。 (4%)

4. 試求下述微分方程之通解

- (1) $y^{(6)} + 2y^{(4)} + y'' = 0$ (8%)
- (2) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ (8%)
- (3) $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = x$ (8%)
- (4) $2(3x + 1)^2 y'' + 21(3x + 1)y' + 18y = 0$ (8%)

5. 已知微分方程式 $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = (x^2 + x - 1)e^{2x}$

- (1) 已知 $y_1 = e^{ax}$ 為上述 ODE 之一補解, 試問 $a = ?$ (2%)
- (2) 試問: 另一補解與特解分別為何? (8%)

6. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$, 若給定質量塊 $m = 2$, 阻尼係數 $c = 0$ 與彈簧常數 $k = 8$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0) = 0$ 與 $\dot{y}(0) = 0$, 給一外力為 $f(t) = 4 \cos \omega t$, 試問:

- (1) 此系統的自然振動頻率 $\omega_n = ?$ (2%)
- (2) 若 y_1, y_2 為其兩補解, 試求: $W(y_1, y_2) = ?$ (4%)
- (3) 當 $\omega = 2$, 其解為何? (4%) 此時系統的運動行為稱為什麼? (2%)
- (4) 當 $\omega = 1.99$, 其解為何? (4%) 此時系統的運動行為稱為什麼? (2%)