

國立臺灣海洋大學河海工程學系 2025 工程數學(一) 期末考考題(總分為 111 分)

日期: 2025.12.31 9:00-12:00 考試地點: 河工一館二樓 2AB 聯合考題

命題老師: 李應德、陳正宗 助教: 高聖凱、周彥廷、陳迎鎬、金尚平、詹于葦、游以暄、黃家峻

系級: _____ 學號: _____ 姓名: _____

1. A, B 與 C 為矩陣, r 為純量, 試回答下述問題: (10%)

(1) $AB = BA$	(A) True (B) False	()
(2) $AB = AC \Rightarrow B = C$	(A) True (B) False	()
(3) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ 或 $B = 0$	(A) True (B) False	()
(4) $(AB)^T = A^T B^T$	(A) True (B) False	()
(5) $(rA)^{-1} = rA^{-1}$	(A) True (B) False	()

2. 若 $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ 且 $a > 1$, 試問: $a =$ _____ 與 $b =$ _____ (10%)

3. 已知一矩陣 $B_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 試求此矩陣行列式值 $\det(B_1) = ?$ 若 $B_2 = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}$ 試問 $\det(2B_2) = ?$ 已知

一矩陣 $A = \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix}$ 與 $\det(A) = 4$, 若 $A_2 = \begin{bmatrix} -r & -s & -t \\ 2x-4r & 2y-4s & 2z-4t \\ 3u & 3v & 3w \end{bmatrix}$ 求 $\det(A_2)$ 與 $\det((3A^{-1})^T)$ (8%)

$\det(B_1) =$ _____	$\det(2B_2) =$ _____
$\det(A_2) =$ _____	$\det((3A^{-1})^T) =$ _____

4. (1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 試求 $\det(A) = ?$ (5%) (2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 試求 $A = ?$ (5%)

$\det(A) =$ _____	$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} _ & _ & _ & _ \\ _ & _ & _ & _ \\ _ & _ & _ & _ \\ _ & _ & _ & _ \end{bmatrix}$
-------------------	--

5. 已知 $x_1 + x_2 + x_3 = 2, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, 3x_1 + 4x_2 + (k^2 - 6)x_3 = k + 4$ 試問 k 分別為何值時, 會使上述線性系統有 (1)唯一解 (2)無解 (3)無限多解。(8%)請依以下步驟進行分析:

步驟	題目敘述與引導	作答欄
----	---------	-----

1	【寫出係數矩陣與常數向量】 請將方程組寫成矩陣形式 $Ax=b$ 。	$A = \begin{bmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix}$
2	【計算行列式 $\det(A)$】 利用行運算化簡行列式，並求出其值（用 k 表示）。	$\det(A) = _$
3	【判斷唯一解的情況】 方程組有唯一解的充要條件是什麼？ 根據上一步結果，求出 k 的範圍。	條件： $\det(A) \neq 0$ 解得： $k \neq _$ 時有唯一解。
4	【分析無解與無限多解的情況】 1. 當 $\det(A)=0$ 時， k 值為何？ 2. 此時方程組可能無解或無限多解。	1. 當 $\det(A)=0$ ，得 $k = \pm 3$ 。 2. 討論： - 當 $k=3$ 時，方程組為 $_$ (無解/無限多解)。 - 當 $k=-3$ 時，方程組為 $_$ (無解/無限多解)。

6. 在空間 R^4 中給定三向量 $x^1 = [0 \ 1 \ 2 \ 1]^T$, $x^2 = [0 \ 1 \ 3 \ 1]^T$, $x^3 = [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$ 請完成以下問題。

(1) 根據此組向量找出正交單位向量集 $\{y^1 \ y^2 \ y^3\}$ (6%) (2) 找出與 $\{y^1 \ y^2 \ y^3\}$ 皆垂直之單位向量 y^4 (4%)

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1a	【計算 y^1】 將 x^1 單位化，作為第一個正交基底向量 y^1 。	$y^1 = _$
1b	【計算 v^2 與 y^2】 1. 透過 $v^2 = x^2 - \langle y^1, x^2 \rangle y^1$ 求 v^2 。 2. 將 v^2 單位化得 y^2 。	$v^2 = _ \quad y^2 = _$
1c	【計算 v^3 與 y^3】 1. 透過 $v^3 = x^3 - \langle y^1, x^3 \rangle y^1 - \langle y^2, x^3 \rangle y^2$ 求 v^3 。 2. 將 v^3 單位化得 y^3 。	$v^3 = _ \quad y^3 = _$
2a	【建立方程組】 令 $y^4 = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T$ 。根據 y^4 與 y^1, y^2, y^3 皆垂直，列出三個方程。	$\langle y^4, _ \rangle = 0$ $\langle _, y^2 \rangle = 0$ $\langle y^4, _ \rangle = 0$
2b	【求解方程組】 聯立上述方程組，以 $y^1 = t$ 為自由參數，表示出 y^2, y^3, y^4 。利用 y^4 為單位向量的條件，決定參數 t 的值。	$y^4 = \begin{bmatrix} _ \\ _ \\ _ \\ _ \end{bmatrix}$

7. 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，試回答下列問題(19%)。

(一) 特徵值與特徵向量

步驟	題目敘述與引導	作答欄
----	---------	-----

1	求矩陣 A 的特徵方程 $\det(A-\lambda I)=0$ 並解出所有特徵值。	特徵值： $\lambda_1 = \underline{\quad}$ ， $\lambda_2 = \lambda_3 = \underline{\quad}$ (重根)
2	對應每個特徵值，求一組特徵向量。 1. 對 λ_1 ，求 x^1 使得 $(A-\lambda_1 I)x^1=0$ 。 2. 對 λ_2 ，求兩個線性獨立的廣義特徵向量 x^2, x^3 。	$x^1 = \begin{Bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{Bmatrix}$ $x^2 = \begin{Bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{Bmatrix}$ $x^3 = \begin{Bmatrix} \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \\ \underline{\quad} \end{Bmatrix}$

方法一：應用矩陣餘式定理（或稱多項式分解法）求 A^{100}

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1	矩陣 A 的特徵多項式。根據 Cayley-Hamilton 定理，列出 A 滿足的三次多項式，並將 A^{100} 改寫成對應的多項式恆等式。	A 滿足的三次多項式 $\underline{\hspace{2cm}} = 0$ $x^{100} = (\underline{\hspace{2cm}})Q(x) + px^2 + qx + r = 0$
2	將特徵值代入上式，建立聯立方程。	1. 代入 $x=\lambda_1$ ： $\underline{\hspace{2cm}}$ 2. 代入 $x=\lambda_2$ ： $\underline{\hspace{2cm}}$ 3. 對 $x=\lambda_2$ 取導數後代入： $\underline{\hspace{2cm}}$
3	解上述聯立方程，求出 p, q, r 。	$p = \underline{\quad}$ ， $q = \underline{\quad}$ ， $r = \underline{\quad}$
4	利用 $A^{100} = pA^2 + qA + rI$ 計算出最終矩陣。	$A^{100} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$

方法二：利用 Jordan 標準形求 A^{100}

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1	構造矩陣 $P = [x^1 \ x^2 \ x^3]$ ，並寫出其對應的 Jordan 矩陣 J ，使得 $A = PJP^{-1}$ 。	$P = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$ ， $J = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$
2	透過 $J^{100} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{100} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{100} & (\lambda_2^{100})' \\ 0 & 0 & \lambda_2^{100} \end{bmatrix}$ 計算 J^{100} 。	$J^{100} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$
3	利用關係 $A^{100} = PJ^{100}P^{-1}$ 計算 A^{100} 。	$A^{100} = \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$
4	兩種方法比較結果是否相同	$\underline{\hspace{2cm}}$ (Yes/No)

8. 給方程式 $-3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2 = 20$ ，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2]$ ，請完成以下分析(14%)。

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1	【寫出二次型矩陣】 將方程式寫成矩陣形式 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 20$ ，找出對稱矩陣 A	$\Rightarrow \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} \mathbf{x} = 20$

2	【求特徵值】 解特徵方程 $\det(A-\lambda I)=0$ ，求矩陣 A 的特徵值 λ	$\Rightarrow \lambda = _ \text{ or } _$
3	【求對應的特徵向量並單位化】 1. 對 λ_1 ，解 $(A-\lambda_1 I)x^1=0$ ，得單位特徵向量 x^1 。 2. 對 λ_2 ，解 $(A-\lambda_2 I)x^2=0$ ，得單位特徵向量 x^2 。	$x^1 = \begin{Bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{Bmatrix} \quad x^2 = \begin{Bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{Bmatrix}$
4	【構造轉換矩陣】 以單位特徵向量為行，構造正交矩陣 S 。此矩陣即為從舊座標 x 到主軸座標 y 的轉換矩陣。	$S = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$
5	【寫出主軸標準型】 利用關係 $y = S^T x$ ，將原方程式化為以 y_1, y_2 表示的標準型。	_____
6	【判斷圓錐曲線類型】 根據步驟5所得的標準型，判斷此方程式代表何種圓錐曲線	_____ (圓、橢圓、雙曲線)
7	【判斷二次式類型】 根據步驟2求得的特徵值符號，判斷 $Q = -3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$ 屬於何種類型的二次式。	因為 $\lambda_1 > 0$ ， $\lambda_2 < 0$ ，符號相異，故 Q 為 _____ 二次式(正定型、負定型或是不定型)。

9. 試解: $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 8y_2 + 1 \\ y_2' = -6y_1 - 9y_2 + t \end{cases}$ 且 $y_1(0) = 4$, $y_2(0) = -3$ 。(12%)

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1	【寫出矩陣形式】 將方程組寫為 $y' = Ay + z$ 。	$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}, z = \begin{Bmatrix} _ \\ _ \end{Bmatrix}$
2	【求特徵系統】 解 $\det(A-\lambda I)=0$ 求特徵值，並求對應的單位特徵向量。	特徵值: $\lambda_1 = _$, $\lambda_2 = _$ 特徵向量: $\Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{Bmatrix}$, $\Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} _ \\ _ \\ _ \end{Bmatrix}$
3	【構造對角化矩陣】 令 $S = [x^1 \ x^2]$ 並求 S^{-1} 。	$S = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} _ & _ \\ _ & _ \end{bmatrix}$
4	【變數代換與解耦】 令 $y = S\bar{y}$ ，代入方程，導出關於 \bar{y} 的已解耦方程組。	$\begin{cases} \bar{y}_1' = _ \\ \bar{y}_2' = _ \end{cases}$
5	【求解化簡方程】 分別求解上述兩個獨立的一階線性 ODE。	$\begin{cases} \bar{y}_1' = _ \\ \bar{y}_2' = _ \end{cases}$
6	【寫出最終特解】 1. 利用 $y = S\bar{y}$ 寫出 $y_1(t)$, $y_2(t)$ 的通解。 2. 代入 $y_1(0) = 4$ $y_2(0) = -3$ 聯立解未定係數	$y_1(t) = _ \quad y_2(t) = _$

10. 上完了一學期的工程數學，對於這門課在學習上有何心得或感想?(5%) (2) 對於老師的教學方式或是要如何協助同學們學習好這門課有何建議?(5%)
