國立臺灣海洋大學河海工程學系 2025 工程數學(一) 期末考考題(總分為 100 分)
日期: 2025.12.31 9:00-12:00 考試地點:河工一館二樓 2AB 聯合考題
命題老師: 李應德、陳正宗 助教: 高聖凱、周彥廷、陳迎鎬、金尚平、詹于葶、游以暄、黃家畯

系級：________ 學號：________ 姓名：

1. A, B 與 C 為矩陣，r 為純量，試回答下述問題: (10%)

(1) $AB = BA$	(A) True (B) False	(B)
(2) $AB = AC \Rightarrow B = C$	(A) True (B) False	(B)
(3) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ 或 $B = 0$	(A) True (B) False	(B)
(4) $(AB)^T = A^T B^T$	(A) True (B) False	(B)
(5) $(rA)^{-1} = rA^{-1}$	(A) True (B) False	(B)

2. 若 $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ 且 $a > 1$，試問: $a = ?$ 與 $b = ?$(10%)

$a = 2 + \sqrt{3}$	$b = 2 - \sqrt{3}$

3. 已知一矩陣 $B_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 試求此矩陣行列式值 $\det(B_1) = ?$ 若 $B_2 = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix}$ 試問 $\det(2B_2) = ?$ 已知一矩陣 $A = \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix}$ 與 $\det(A) = 4$，若 $A_2 = \begin{bmatrix} -r & -s & -t \\ 2x-4r & 2y-4s & 2z-4t \\ 3u & 3v & 3w \end{bmatrix}$ 求 $\det(A_2)$ 與 $\det((3A^{-1})^T)$ (8%)

$\det(B_1) = ad - bc$	$\det(2B_2) = 4ad - 4bc$
$\det(A_2) = 24$	$\det((3A^{-1})^T) = 27/4$

4. (1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，試求 $\det(A) = ?$ (5%) (2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，試求 $A = ?$ (5%)

$\det(A) = 130$	$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. 已知 $x_1+x_2+x_3=2, 2x_1+3x_2+2x_3=5, 3x_1+4x_2+(k^2-6)x_3=k+4$ 試問 k 分別為何值時，會使上述線性系統有 (1)唯一解 (2)無解 (3)無限多解。(8%)請依以下步驟進行分析：

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1	**【寫出係數矩陣與常數向量】** 請將方程組寫成矩陣形式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$。	$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & k^2-6\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ k+4\end{bmatrix}$
2	**【計算行列式 det(A)】** 利用行運算化簡行列式，並求出其值（用 k 表示）。	**det(A)** $=k^2-9$
3	**【判斷唯一解的情況】** 方程組有唯一解的充要條件是什麼？ 根據上一步結果，求出 k 的範圍。	條件：$\det(A)\neq 0$ 解得：$k\neq\pm 3$ 時有唯一解。
4	**【分析無解與無限多解的情況】** 1. 當 det(A)=0 時，k 值為何？ 2. 此時方程組可能無解或無限多解。	1. 當 det(A)=0，得 $k=\pm 3$。 2. **討論：** - 當 $k=3$ 時，方程組為無限多解（無解/無限多解）。 - 當 $k=-3$ 時，方程組為無解（無解/無限多解）。

6. 在空間 R^4 中給定三向量 $x^1=\left[0\ 1\ 2\ 1\right]^T$, $x^2=\left[0\ 1\ 3\ 1\right]^T$, $x^3=\left[1\ 1\ 1\ 0\right]^T$ 請完成以下問題。

(1)根據此組向量找出正交單位向量集 $\left\{y^1\ y^2\ y^3\right\}$ (6%) (2)找出與 $\left\{y^1\ y^2\ y^3\right\}$ 皆垂直之單位向量 y^4 (4%)

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1a	**【計算 y^1】** 將 x^1 單位化，作為第一個正交基底向量 y^1。	$y^1=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[0\ 1\ 2\ 1\right]^T$
1b	**【計算 v^2 與 y^2】** 1. 透過 $v^2=x^2-\langle y^1,x^2\rangle y^1$ 求 v^2。 2. 將 v^2 單位化得 y^2。	$v^2=\left[0\ -\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\right]^T$ $y^2=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[0\ -1\ 1\ -1\right]^T$
1c	**【計算 v^3 與 y^3】** 1. 透過 $v^3=x^3-\langle y^1,x^3\rangle y^1-\langle y^2,x^3\rangle y^2$ 求 v^3。 2. 將 v^3 單位化得 y^3。	$v^3=\left[1\ \frac{1}{2}\ 0\ -\frac{1}{2}\right]^T$ $y^3=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[2\ 1\ 0\ -1\right]^T$
2a	**【建立方程組】** 令 $y^4=\left[y_1\ \ y_2\ \ y_3\ \ y_4\right]^T$。根據 y^4 與 y^1, y^2, y^3 皆垂直，列出三個方程。	$\langle y^4,y^1\rangle=0$ $\langle y^4,y^2\rangle=0$ $\langle y^4,y^3\rangle=0$
2b	**【求解方程組】** 聯立上述方程組，以 $y^1=t$ 為自由參數，表示出 y^2, y^3, y^4。利用 y^4 為單位向量的條件，決定參數 t 的值。	$y^4=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

7. 已知 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，試回答下列問題(18%)。

(一) 特徵值與特徵向量

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1	求矩陣 A 的特徵方程 $\det(A\text{-}\lambda I)=0$ 並解出所有特徵值。	特徵值：$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$(重根)
2	對應每個特徵值，求一組特徵向量。 1. 對 λ_1，求 x^1 使得 $(A\text{-}\lambda_1 I)x^1=0$。 2. 對 λ_2，求兩個線性獨立的廣義特徵向量 x^2, x^3。	$x^1=\begin{Bmatrix}1\\3\\0\end{Bmatrix}\ x^2=\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}\ x^3=\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}$

方法一：應用矩陣余式定理（或稱多項式分解法）求 A^{100}

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1	矩陣 A 的特徵多項式。根據 **Cayley-Hamilton 定理**，可將 A^{100} 改寫成對應的多項式恆等式。	$x^{100}=\left(x^3-x^2-x+1\right)Q\left(x\right)+px^2+qx+r=0$
2	將特徵值代入上式，建立聯立方程以求解係數 p, q, r。	1. 代入 $x=-1$：$p-q+r=1$ 2. 代入 $x=1$：$p+q+r=1$ 3. 對 $x=1$ 取導數後代入：$200=2p+q$
3	解上述聯立方程，求出 p, q, r。	$p=50, q=0, r=-49$
4	利用 $A^{100}=pA^2+qA+rI$ 計算出最終矩陣。	$A^{100}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 100\\ 0 & 1 & 100\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

方法二：利用 Jordan 標準形求 A^{100}

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1	構造矩陣 $P=[x^1\ \ x^2\ \ x^3]$，並寫出其對應的 Jordan 矩陣 J，使得 $A=PJP^{-1}$。	$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $J=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
2	透過 $J^{100}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{100} & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{100} & \left(\lambda_2^{100}\right)'\\ 0 & 0 & \lambda_2^{100}\end{bmatrix}$ 計算 J^{100}。	$J^{100}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 100\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
3	利用關係 $A^{100}=PJ^{100}P^{-1}$ 計算 A^{100}。	$A^{100}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 100\\ 0 & 1 & 100\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
4	兩種方法比較結果是否相同	相同

8. 給方程式 $-3x_1^2+8x_1x_2+3x_2^2=20$，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T=[y_1\ y_2]$，請完成以下分析(14%)。

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1	**【寫出二次型矩陣】** 將方程式寫成矩陣形式 $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}=20$，找出對稱矩陣 A	$\Rightarrow \mathbf{x}^T\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}\mathbf{x}=20$
2	**【求特徵值】** 解特徵方程 $\det(A-\lambda I)=0$，求矩陣 A 的特徵值 λ	$\Rightarrow \lambda=5$ or -5
3	**【求對應的特徵向量並單位化】** 1. 對 λ_1，解 $(A-\lambda_1 I)x^1=0$，得單位特徵向量 x^1。 2. 對 λ_2，解 $(A-\lambda_2 I)x^2=0$，得單位特徵向量 x^2。	$x^1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}\ x^2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{Bmatrix}-2\\1\end{Bmatrix}$
4	**【構造轉換矩陣】** 以單位特徵向量為行，構造正交矩陣 s。此矩陣即為從舊座標 $\mathbf{x}$ 到主軸座標 $\mathbf{y}$ 的轉換矩陣。	$s=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$
5	**【寫出主軸標準型】**利用關係 $y=s^T x$，將原方程式化為以 y_1, y_2 表示的標準型。	$\Rightarrow \frac{y_1^2}{2^2}-\frac{y_2^2}{2^2}=1$
6	**【判斷圓錐曲線類型】**根據步驟 5 所得的標準型，判斷此方程式代表何種圓錐曲線	此為雙曲線
7	**【判斷二次式類型】** 根據步驟 2 求得的特徵值符號，判斷 $Q=-3x_1^2+8x_1x_2+3x_2^2$ 屬於何種類型的二次式。	因為 $\lambda_1>0$，$\lambda_2<0$，符號相異，故 Q 為 **不定型**二次式(正定**型**、負定**型或是**不定**型**)。

9. 試解: $\begin{cases} y_1'=5y_1+8y_2+1 \\ y_2'=-6y_1-9y_2+t \end{cases}$ 且 $y_1(0)=4$，$y_2(0)=-3$。 (12%)

步驟	題目敘述與引導	作答欄
1	**【寫出矩陣形式】** 將方程組寫為 $y'=Ay+z$。	$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}5 & 8\\ -6 & -9\end{bmatrix}, z=\begin{Bmatrix}1\\t\end{Bmatrix}$
2	**【求特徵系統】**解 $\det(A-\lambda I)=0$ 求特徵值，並求對應的單位特徵向量。	特徵值：$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-3$ 特徵向量：$\Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}4\\-3\end{Bmatrix}, \Rightarrow x^2=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$
3	**【構造對角化矩陣】** 令 $S=[x^1\ \ x^2]$並求 S^{-1}。	$S=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}\ \Rightarrow S^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}$
4	**【變數代換與解耦】** 令 $y=S\bar{y}$，代入方程，導出關於 $\bar{y}$ 的**已解耦**方程組。	$\Rightarrow\begin{cases}\bar{y}_1'=-\bar{y}_1+1+t\\ \bar{y}_2'=-3\bar{y}_2-3-4t\end{cases}$
5	**【求解化簡方程】** 分別求解上述兩個獨立的一階線性 ODE。	$\Rightarrow\begin{cases}\bar{y}_1'=-\bar{y}_1+1+t\\ \bar{y}_2'=-3\bar{y}_2-3-4t\end{cases}$
6	**【寫出最終特解】** 1. 利用 $y=S\bar{y}$ 寫出 $y_1(t)$，$y_2(t)$ 的通解。 2. 代入 $y_1(0)=4\ y_2(0)=-3$ 聯立解未定係數	$y_1(t)=4e^{-t}+\frac{5}{9}e^{-3t}+\frac{8}{3}t-\frac{5}{9}$ $y_2(t)=-3e^{-t}-\frac{5}{9}e^{-3t}-\frac{5}{3}t+\frac{5}{9}$