

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1、求出函數 $-x^2 - 1$ 與 $4x^2 + 4$ 之公切線，如右圖所示。2、有一函數 $\frac{2ax+b}{x^2+1}$ ，已知最大值 = 4，最小值 = -1，其中 a 與 b 為正實數，求 (a, b) ？

ans:

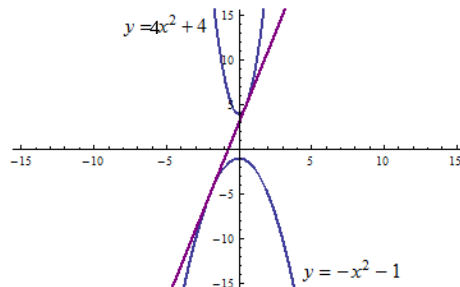
<方法一>

$$-1 \leq \frac{2ax+b}{x^2+1} \leq 4$$

$$-x^2 - 1 \leq 2ax + b \leq 4x^2 + 4$$

用斜率求出包絡線上的兩切點位置

$$2a = 8x, x = \frac{a}{4} \quad 2a = -2x, x = -a$$



$$\text{得與最大值的切點為 } \left(\frac{a}{4}, \frac{a^2}{4} + 4 \right), \text{ 與最小值的切點為 } (-a, -a^2 - 1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{5a^2}{4} + 5}{\frac{5a}{4}} = 2a$$

得 $a = \pm 2$ $\because a$ 為正實數 $\therefore a = 2$ $\because y = 4x + b$ 通過 $(-2, -5)$ $\therefore b = 3$

<方法二>

$$-1 \leq \frac{2ax+b}{x^2+1} \leq 4$$

設 $f(p) = 4, f'(p) = 0, f(q) = -1, f'(q) = 0$

$$f(x)(x^2+1) = 2ax + b$$

$$\Rightarrow f'(x)(x^2+1) + f(x)(2x) = 2a$$

$$x \text{ 代入 } p \text{ 得 } 0 + 8p = 2a, p = \frac{a}{4}$$

$$x \text{ 代入 } q \text{ 得 } 0 - 2q = 2a, q = -a$$

$$\begin{cases} \frac{2ap+b}{p^2+1} = 4 \\ \frac{2aq+b}{q^2+1} = -1 \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} a = 2, b = 3 \\ a = -2, b = 3 \end{cases}$$

 $\because a, b$ 為正實數 $\therefore a = 2, b = 3$

3. 1 與 2 兩題為同一數學問題