國立台灣海洋大學　河海工程學系 2B　　工程數學（一）陳正宗終身特聘教授

工數第二次大考(二階 ODE、高階 ODE)

時間：18:00-21:00 Dec.13, 2016 (open A4)　　地點：HR2504

日期：2016 年 12 月 13 日　　姓名：__________　　學號：__________

1. 兩階 ODE 表示為 $\ddot{y}(t)+8\dot{y}(t)+12y(t)=0$，初始位移 $y(0)=y_0$ 及初速度 $\dot{y}(0)=\dot{y}_0$。

※ $\sinh(t)=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2};\cosh(t)=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$

(a). 試問此 2 階 ODE 的解是否會振盪**(3%)**其位移解 $y(t)$，$t\to\infty$ 是否會衰減至 0？**(3%)**

(b). 若 ω 為一係數，利用 Wronskian 判斷 $\sinh(\omega t)$ 與 $\cosh(\omega t)$ 相依或獨立。**(2%)**

(c). 若其補解可表示為 $y_h=e^{at}\left(c_1\cosh(bt)+c_2\sinh(bt)\right)$，求出 a、b 各是多少**(6%)**與 c_1、c_2 為何(以 $y_0,\dot{y}_0$ 表示)。**(6%)**

2. 兩階 ODE 表示為 $\ddot{y}(t)+y(t)=\sin(\Omega t)$，當 $\Omega=1$。

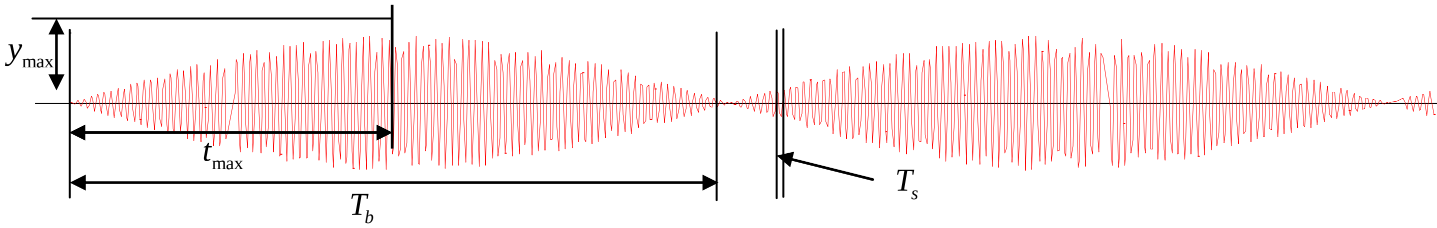
(a). 求兩補解 $y_1(t)$ 與 $y_2(t)$ 為何？**(2%)**

(b). 計算其 Wronskian 判斷兩補解是否相依或獨立。**(2%)**

(c). 假設特解可表示為 $y_p=u_1y_1+u_2y_2$，試利用(a)算出的兩補解求出 u_1、u_2 與特解為何？**(8%)**

(d). 假設 $y_p=A\sin(\Omega t)$，A=?**(2%)**利用 L'hospital's rule 計算 $\Omega\to 1$(共振下)的特解為何？**(6%)**

3. If $\left(\dfrac{10}{31}\right)^2\ddot{y}(t)+y(t)=\cos(3t)$, subject to $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$, find the final solution **(12%)** and the result is shown below:



Please estimate T_s, T_b, t_{max} and y_{max}. **(8%)**（小數點請四捨五入到小數點第二位）

4. Given three second-order ODEs

(a) Solve $\ddot{y}+\dot{y}+2y=\cos(2t)$

by using $y_p(t)=a\cos(2t)+b\sin(2t)=A\cos(2t+\alpha)$, $0\le\alpha\le 2\pi$.

Determine the A and α. **(4%)**

(b) Solve $\ddot{y}+\dot{y}+2y=\sin(2t)$

by using $y_p(t)=c\cos(2t)+d\sin(2t)=B\sin(2t+\beta)$, $0\le\beta\le 2\pi$.

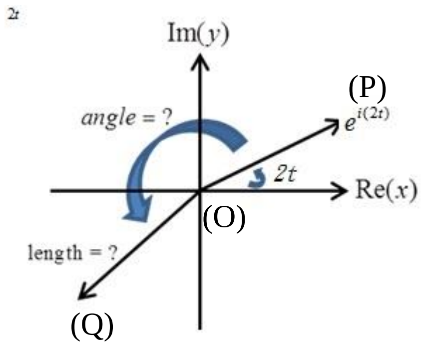
Determine the B *and* β. **(4%)**

(c) Solve $\ddot{y}+\dot{y}+2y=e^{i(2t)}$ by using $y_p(t)=Ze^{i(2t)}$. **(4%)**

If $Z=\rho e^{i\phi}$, $\rho>0$, $0\le\phi\le 2\pi$. Determine the ρ and ϕ.

(d) What is the relationship among A, B, ρ and among α, β, ϕ? Find the length of $\overline{OQ}$ and the angle of POQ shown in the figure. **(4%)**

(e) 輸入外力 $e^{i(2t)}$ 與輸出位移 $Ze^{i(2t)}$ 振幅放大多少，相差(phase lag)多少? **(4%)**



5. **Given a second-order ODE** $t^2y''(t)-2ty'(t)+2y(t)=0$,

(a) Find the two complementary solutions $y_1(t)$ and $y_2(t)$ by assuming $y(t)=t^m$. **(2%)**

(b) Find the Wronskian of the two complementary solutions. **(2%)**

(c) Solve the particular solution for $t^2y''(t)-2ty'(t)+2y(t)=2$ by using variation of parameters. **(6%)**

(d) By changing $t=e^x$ and $y(t)=Y(x)$, transform the second order ODE for $Y(x)$ and solve the two complementary solutions and one particular solution for $Y(x)$. **(10%)**

感謝教育部教學卓越計畫贊助海大教學中心經費設立成果導向方案，讓我們能為學生們的有效學習多盡點心力。