

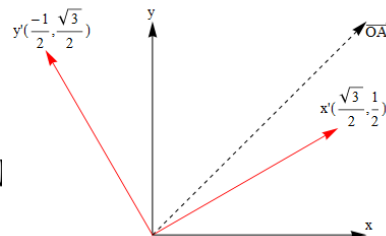
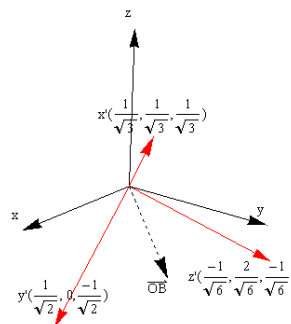
工數第三次大考(矩陣特徵值問題與張量)

時間：09:00-12:00 Jan.11, 2017 (Open A4)

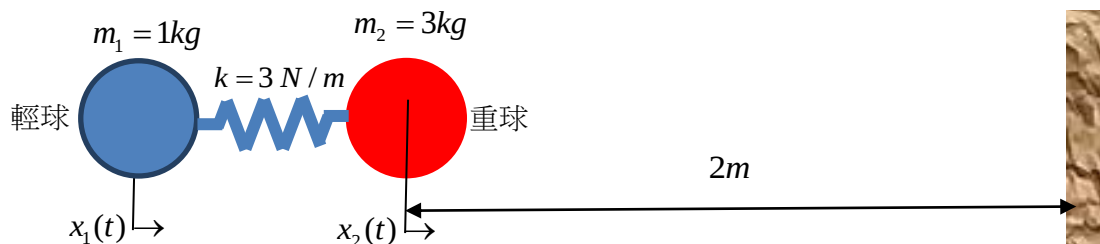
地點：河工二館 404 教室

日期：2017 年 1 月 11 日 姓名：_____ 學號：_____

1. 不同觀察座標系統觀察同一個位置向量，如何計算其分量。(25%)

(1) 舊觀察座標系統的兩個基底向量 $\begin{cases} \mathbf{e}_1 = (1, 0) \\ \mathbf{e}_2 = (0, 1) \end{cases}$ ，可得 $\overrightarrow{OA} = (1, 1)$ 。若新觀察座標系統的兩個基底向量為 $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = (\cos(30^\circ), \sin(30^\circ)) \\ \mathbf{e}'_2 = (\cos(120^\circ), \sin(120^\circ)) \end{cases}$ ，則(a) 若新舊座標之關係式為 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，則轉換矩陣 $[Q] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = ?$ (4%)其中 $l_{ij} = \cos(\theta_{ij})$ ， θ_{ij} 代表新 i 軸與舊 j 軸夾角 ※Hint: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta)$ (b) 則向量 $\overrightarrow{OA}$ 在新觀察座標的分量 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 為何？(4%) 並比較新舊座標下 $|\overrightarrow{OA}|$ 的大小？(2%)(2) 舊觀察座標系統的基底向量 $\begin{cases} \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) \\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0) \\ \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$ 如圖， $\overrightarrow{OB} = (1, 1, 0)$ 。新觀察座標系統的基底向量為 $\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ \mathbf{e}'_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \mathbf{e}'_3 = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}) \end{cases}$ ，則(a) 請問新舊座標轉換之關係式為 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ，則轉換矩陣 $[Q] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$ 為何？(9%)(b) 請問在新觀察座標下 $\overrightarrow{OB}$ 的分量 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ 為何？(4%) 並比較新舊座標下 $|\overrightarrow{OB}|$ 的大小？(2%)

2. 不加束制的雙自由度振動系統與特徵值問題 (42%)



(1) 依上圖所示，分別取兩顆球的自由體圖，利用力平衡推導出雙自由度的微分方程矩陣型式

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ 請問}$$

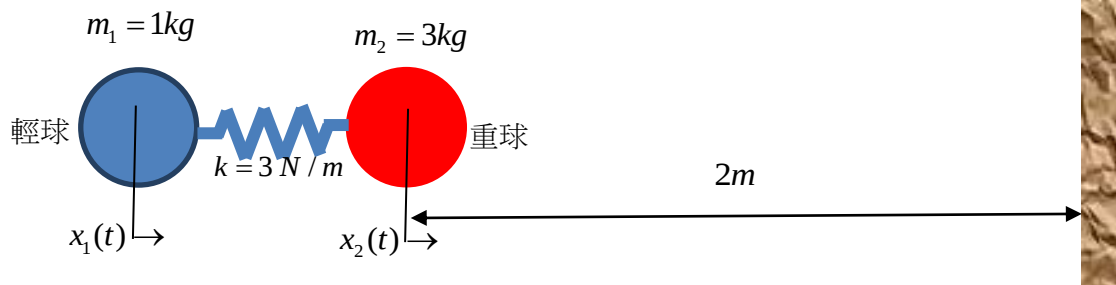
$$m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}, k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22} (8\%)$$

(2) 猜 $\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \cos \omega t$ 或 $\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \sin \omega t$ 或 $\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$ ，將(1)之矩陣轉為特徵

值問題，求解 ω 與 $\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}$ ，並得出 $\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$ 通解的型式。(8%)

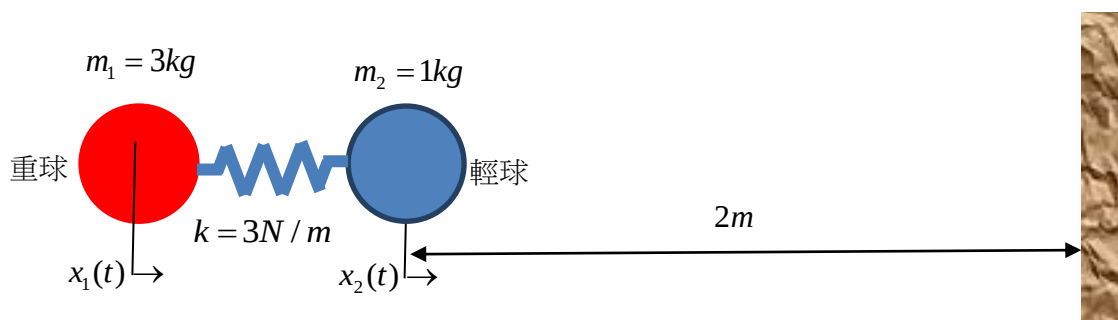
(3) (a)如下圖，若給初始條件 $\begin{cases} x_1(0)=0 \\ v_1(0)=1 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} x_2(0)=0 \\ v_2(0)=0 \end{cases}$ ，求解 $\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = ?$ 並判斷可否抵達右邊

遠端牆壁，並請以數學及物理說明之。(5%)



(b)如下圖，若兩球互換(見下圖)，初始條件不變(左球初速度為 1，其他為 0)，判斷可否抵

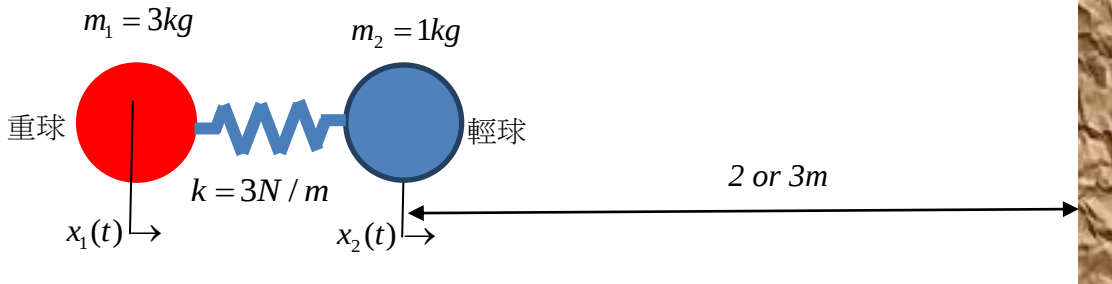
達右端牆壁？(5%) $\begin{cases} x_1(0)=0 \\ v_1(0)=1 \end{cases} \begin{cases} x_2(0)=0 \\ v_2(0)=0 \end{cases}$



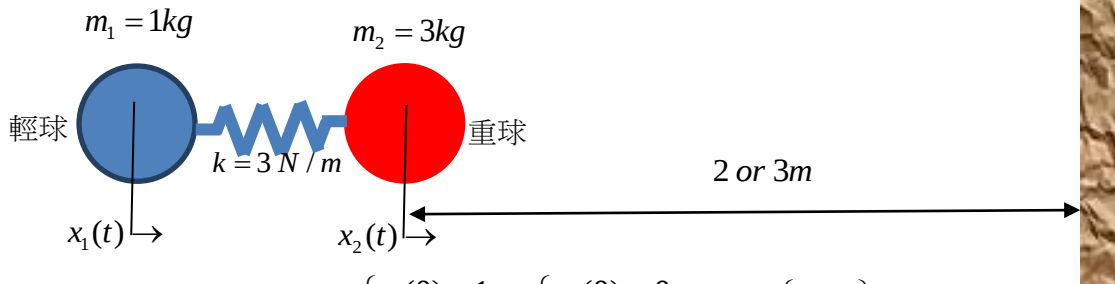
(c)如下圖，根據(3)(a)與(b)之結果，(a)或(b)系統何者的右球質心會先到達牆壁呢？並請以數學及物理說明之。(5%)

(4) 承(3)(a)與(b)的系統，不計球的大小、彈簧的長度，僅考慮球的質量(視球為一質點)，分別只給重球初速度為 1，其他初條件均為 0，請畫出(3)(a)與(b)之右球質心 $x_2(t)$ 與時間 t 的關係圖(兩張哦)，若(a)與(b)的右球質心距離右邊牆壁 2 公尺，請問(a)或(b)何者的右球先碰到牆壁？若(a)與(b)的右球質心距離右邊牆壁 3 公尺，請問(a)或(b)何者的右球先碰到牆壁？(6%)

$$(a) \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ v_1(0) = 1 \end{cases} \begin{cases} x_2(0) = 0 \\ v_2(0) = 0 \end{cases}$$

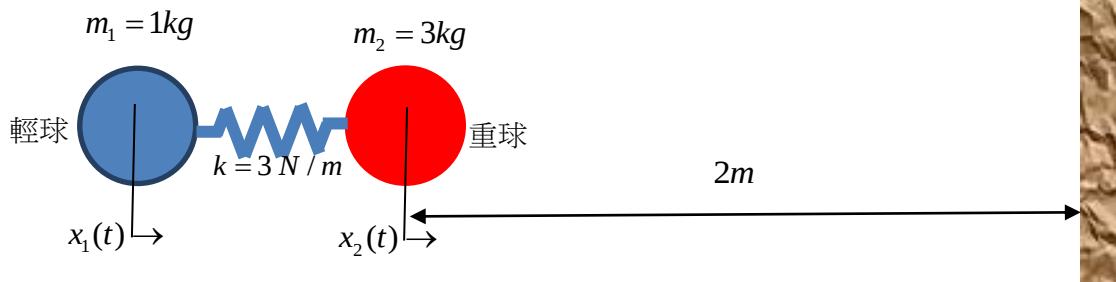


$$(b) \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ v_1(0) = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2(0) = 0 \\ v_2(0) = 1 \end{cases}$$



(5) 若(3)(a)的初始條件改成 $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ v_1(0) = 0 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} x_2(0) = 0 \\ v_2(0) = 0 \end{cases}$ ，求解 $\begin{cases} x_1(t) \\ x_2(t) \end{cases} = ?$ 判斷可否抵達右端牆

壁，並請以數學及物理說明之。(5%)



3. 長方形斷面如右圖所示，在不同觀察座標系統下的慣性矩張量描述

$$(1) \text{ 求 } I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} \quad (8\%)$$

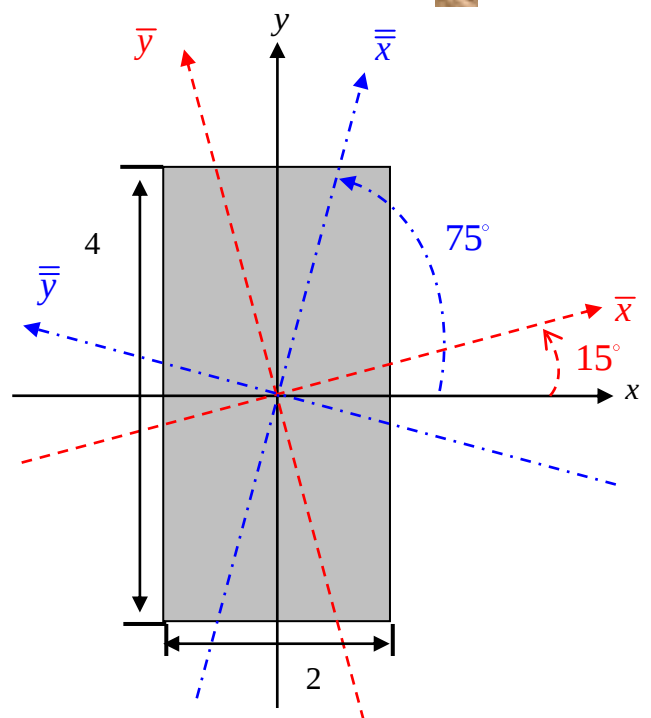
(2) 求 $I_2 = \begin{bmatrix} I_{\bar{x}\bar{x}} & I_{\bar{x}\bar{y}} \\ I_{\bar{y}\bar{x}} & I_{\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix}$ (15 度)，並求出 I_2 的特徵值與特徵向量並說明所得結果代表的意義。(8%)

(3) 求 $I_3 = \begin{bmatrix} I_{\bar{\bar{x}}\bar{\bar{x}}} & I_{\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}} \\ I_{\bar{\bar{y}}\bar{\bar{x}}} & I_{\bar{\bar{y}}\bar{\bar{y}}} \end{bmatrix}$ (75 度)，並求出 I_3 的特徵值與特徵向量並說明所得結果代表的意義。(8%)

(2)(3)小題請注意，用任何計算方法均可但需計算過程，請不要用計算機算，並且勿用小數形式表示，請用有理數、無理數與分數表示。特徵向量

可用角度表示或表示成 $\begin{Bmatrix} \square \\ 1 \end{Bmatrix}$ 的形式，才給分。

(4) 把上述三小題結果以一個 Mohr's 圓畫出表



4. 對稱斷面之慣性矩在不同觀察座標系統下之張量描述 (28%)

(1) 已知半徑為 a 的圓形斷面，如圖，試求其慣性矩 ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dA = r dr d\theta$)

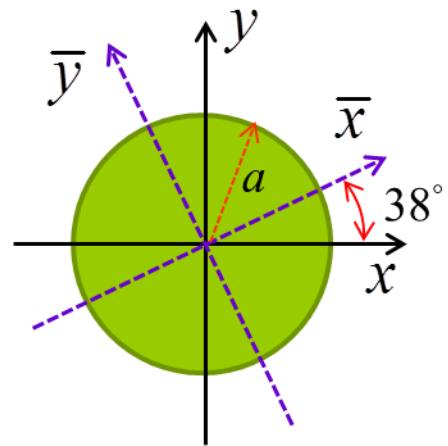
(a) $I_{xx} = \iint y^2 dA$ (3%)

(b) $I_{xy} = -\iint xy dA$ (3%)

(c) $I_{yy} = \iint x^2 dA$ (3%)

(d) 若觀察座標逆時針旋轉 38° ，試求

$$\begin{bmatrix} I_{\bar{x}\bar{x}} & I_{\bar{x}\bar{y}} \\ I_{\bar{y}\bar{x}} & I_{\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix} = ? \quad (4\%)$$



(e) 請畫出此慣性矩張量之 Mohr's 圓，並找出圓心位置與半徑，試說明所觀察到的數學與物理現象。(3%)

(2) 若正方形斷面之邊長為 a ，如圖，試求慣性矩

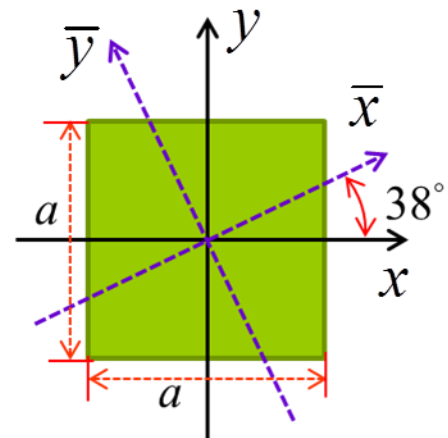
(a) $I_{xx} = \iint y^2 dA$ (3%)

(b) $I_{xy} = -\iint xy dA$ (3%)

(c) $I_{yy} = \iint x^2 dA$ (3%)

(d) 若觀察座標逆時針旋轉 38° ，試求

$$\begin{bmatrix} I_{\bar{x}\bar{x}} & I_{\bar{x}\bar{y}} \\ I_{\bar{y}\bar{x}} & I_{\bar{y}\bar{y}} \end{bmatrix} = ? \quad (3\%)$$



(e) 請畫出此慣性矩張量之 Mohr's 圓，並找出圓心位置座標與半徑，試說明所觀察到的數學與物理現象。(3%)

5. 上了一個學期的工程數學(一)，針對此課程之老師助教與補救教學與作業、考試方式等，有何建議?(10%)