

文章编号: 1000-1301(2006)05-0014-07

SH 波入射时半圆形凸起与凹陷地形的地震动

吕晓棠, 刘殿魁

(哈尔滨工程大学 建筑工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:研究了弹性半空间中半圆形凸起与凹陷相连地形对 SH 波的散射问题。将整个求解区域分割为 2 部分, 在其中分别构造满足边界条件的位移解, 通过移动坐标使之满足“公共边界”以及半圆形凹陷表面上的边界条件, 从而建立起求解该问题的无穷代数方程组。最后, 给出了地表位移幅值的数值结果以及凸起地形顶点和凹陷地形最低点处位移幅值的反应谱并进行了讨论。

关键词: SH 波散射; 半圆形凸起; 半圆形凹陷; 移动坐标

中图分类号: P315.3

文献标识码: A

Ground motion of a semi-cylindrical hill and a semi-cylindrical canyon caused by incident SH wave

L ÜXiaotang, Liu Diankui

(School of Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: Scattering of SH-wave by a semi-cylindrical hill and a semi-cylindrical canyon in half-space was studied. The domain of solution was divided into two parts, and then the displacement solutions that meet the boundary conditions were constructed in them respectively. By moving coordinates, the solutions were conjoined to satisfy the boundary condition of junction interface and semi-cylindrical canyon; thereby a set of infinite algebraic equations about the problem can be obtained. Finally, the computational results of surface displacement and the response spectrum of the amplitudes of the hill peak and the canyon's lowest point were provided and discussed.

Key words: scattering of sh-wave; semi-cylindrical hill; semi-cylindrical canyon; moving coordinates

引言

地面几何形状对地震动的影响是地震工程学研究的基本课题之一。地形的变化模式大致有凹陷地形和凸起地形 2 种基本形式。波函数展开法和复变函数法有效地解决了凸起、凹陷地形的散射问题^[1-3,7-10]。对凸起地形通常采用“分区”和波函数展开相结合的方法来解答^[3-5,8,11-12]。文献 [5,6] 分别研究了多个半圆形凸起和多个半圆形凹陷与 SH 波的相互作用。凸起与凹陷相连地形在自然界中也广泛存在。在修建铁路的过程中经常会遇到山峰与河谷相连的地形, 由于山峰与河谷间水平地表的长度与山峰或河谷的半径相比很小, 可将其简化为凸起与凹陷相连地形 (如图 1 所示)。因此, 本问题的研究具有一定的理论意义和应用前景。

本文研究了弹性半空间中半圆形凸起与凹陷相连地形对 SH 波的散射问题。将整个求解区域分割为 2

收稿日期: 2005-12-08; 修订日期: 2006-03-08

基金项目: 国家自然科学基金项目 (50478017)

作者简介: 吕晓棠 (1975-), 女, 博士研究生, 主要从事波动理论研究。

部分,如图 2所示。首先利用文献 [3]中的辅助函数法,在区域 I中构造一个预先满足半圆形凸起地形边界应力为 0而其余部分位移、应力任意的驻波,然后在区域 II中考虑“公共边界 和半圆形凹陷产生的散射波,利用复变函数法和移动坐标法^[6,7]使其预先满足水平界面应力为 0的边界条件。最后考虑“公共边界 以及半圆形凹陷上的边界条件,建立求解该问题的无穷代数方程组。

1 问题的表述

半圆形凸起与凹陷地形相连的模型如图 1所示,水平地表记为 S ,半圆形凸起地形边界记为 C ,半径为 a ,圆心为 O_1 ;半圆形凹陷地形边界记为 \bar{S}_2 ,半径为 R ,圆心为 O_2 ; $|O_1O_2|/a = D$ 。求解该模型对稳态平面 SH 波的散射问题,就是要在满足水平边界 S ,凸起边界 C 和凹陷边界 \bar{S}_2 上应力自由的边界条件下,求解 SH 波的控制方程。采用“分区”的方法,将整个求解区域分割成 2部分,如图 2所示。区域 I为包括边界 C 和 \bar{C} 在内的圆形区域;余下部分为区域 II,包括边界 S 、 S_1 和 \bar{S}_2 。其中, C 和 S_1 为 2个区域的公共边界,应该满足应力、位移连续的边界条件。

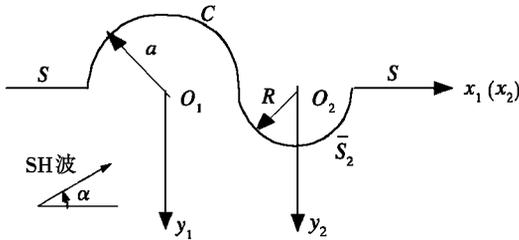


图 1 半圆形凸起与凹陷相连地形模型

Fig 1 The model of a semi-cylindrical hill adpint of a semi-cylindrical canyon

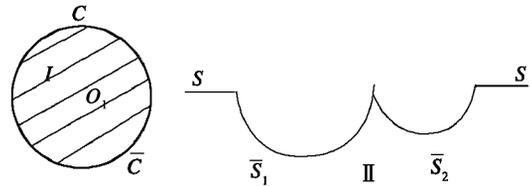


图 2 求解区域的分割

Fig 2 The division of the solution domain

2 理论

2.1 控制方程

在各向同性、均匀、连续的介质中研究弹性波的散射问题,其最为简单的模型就是反平面剪切运动的 SH 波模型。对于稳态情况,位移 $W(x, y, t)$ 要满足运动方程:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k^2 W = 0 \tag{1}$$

其中, W 为位移函数,位移函数与时间的依赖关系为 $e^{-i\omega t}$ (以下略去谐和因子 $e^{-i\omega t}$)。 $k = \omega/c_s$, 为位移 $W(x, y, t)$ 的圆频率; $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ 为介质的剪切波速, ρ 、 μ 分别为介质的质量密度和剪切模量。

应力与应变的关系

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial W}{\partial y} \tag{2}$$

引入复变量 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$,在复平面 (z, \bar{z})上式 (1)和式 (2)可表示如下:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 W = 0 \tag{3}$$

和

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right) \tag{4}$$

在极坐标系中,应力表达式有:

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right), \quad \tau_{\theta z} = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta} \right) \tag{5}$$

2.2 辅助问题

2.2.1 区域 I 内的驻波

如图 1 所示建立坐标系。在圆域 内求解一个驻波解,使其满足边界 C 上应力自由, \bar{C} 上应力任意的边界条件,即在复平面 (\bar{z}_1, \bar{z}_1) 中,

$$\tau_1 = \begin{cases} 0 & z_1 = C \\ \frac{\mu kW_0}{2} C_m [J_{m-1}(k/z_1) - J_{m+1}(k/z_1)] \left[\frac{\bar{z}_1}{z_1} \right]^m & z_1 = \bar{C} \end{cases} \quad (6)$$

其中, W_0 为驻波的最大幅值, C_m 为待求常数。

该驻波解可表示为:

$$W_{(z_1, \bar{z}_1)}^{(st)} = W_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_m \frac{J_{m-1}(ka) - J_{m+1}(ka)}{J_{n-1}(ka) - J_{n+1}(ka)} a_{mn} J_n(k/z_1) \left[\frac{\bar{z}_1}{z_1} \right]^n \quad (7)$$

其中:

$$a_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2} & m = n \\ \frac{e^{i(m-n)} - 1}{2i(m-n)} & m \neq n \end{cases} \quad (8)$$

相应的应力表达式为:

$$\tau_1^{(st)} = \frac{\mu kW_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_m \frac{J_{m-1}(ka) - J_{m+1}(ka)}{J_{n-1}(ka) - J_{n+1}(ka)} a_{mn} [J_{n-1}(k/z_1) - J_{n+1}(k/z_1)] \left[\frac{\bar{z}_1}{z_1} \right]^n \quad (9)$$

2.2.2 区域 II 中的散射波

在区域 II 中存在由半圆形凹陷 S_j ($j=1, 2$) 产生的散射波 $W_{s_j}^{(s)}$, 即:

$$W_{s_j}^{(s)} = \sum_{j=1}^2 W_{s_j}^{(s)} \quad (j=1, 2) \quad (10)$$

构造散射波 $W_{s_j}^{(s)}$, 使其满足水平表面 S 上应力自由的边界条件。由 SH 波散射的对称性和多极坐标法^[6,7]知,在复平面 (\bar{z}_1, \bar{z}_1) 中, $W_{s_j}^{(s)}$ 可表示为:

$$W_{s_j(z_1, \bar{z}_1)}^{(s)} = W_0 \sum_{m=0}^j A_m H_m^{(1)}(k/z_1 - d_j) \left\{ \left[\frac{\bar{z}_1 - d_j}{z_1 - d_j} \right]^m + \left[\frac{\bar{z}_1 - d_j}{z_1 - d_j} \right]^{-m} \right\} \quad (11)$$

相应的应力为:

$$\tau_{1, s_j}^{(s)} = \frac{\mu kW_0}{2} \sum_{m=0}^j A_m \left\{ \begin{aligned} & \left[H_{m-1}^{(1)}(k/z_1 - d_j) \left[\frac{\bar{z}_1 - d_j}{z_1 - d_j} \right]^{m-1} - H_{m+1}^{(1)}(k/z_1 - d_j) \left[\frac{\bar{z}_1 - d_j}{z_1 - d_j} \right]^{-(m+1)} \right] e^{i_1} \\ & \left[-H_{m+1}^{(1)}(k/z_1 - d_j) \left[\frac{\bar{z}_1 - d_j}{z_1 - d_j} \right]^{m+1} + H_{m-1}^{(1)}(k/z_1 - d_j) \left[\frac{\bar{z}_1 - d_j}{z_1 - d_j} \right]^{-(m-1)} \right] e^{-i_1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中, d_j 是以 O_1 为原点时第 j 个 ($j=1, 2$) 半圆形凹陷中心的复坐标。

在复平面 (\bar{z}_2, \bar{z}_2) 中, $W_{s_j}^{(s)}$ 可表示为:

$$W_{s_j(z_1, \bar{z}_1)}^{(s)} = W_0 \sum_{m=0}^j A_m H_m^{(1)}(k/z_2 - d_j) \left\{ \left[\frac{\bar{z}_2 - d_j}{z_2 - d_j} \right]^m + \left[\frac{\bar{z}_2 - d_j}{z_2 - d_j} \right]^{-m} \right\} \quad (13)$$

相应的应力为:

$$\tau_{2, s_j}^{(s)} = \frac{\mu kW_0}{2} \sum_{m=0}^j A_m \left\{ \begin{aligned} & \left[H_{m-1}^{(1)}(k/z_2 - d_j) \left[\frac{\bar{z}_2 - d_j}{z_2 - d_j} \right]^{m-1} - H_{m+1}^{(1)}(k/z_2 - d_j) \left[\frac{\bar{z}_2 - d_j}{z_2 - d_j} \right]^{-(m+1)} \right] e^{i_2} \\ & \left[-H_{m+1}^{(1)}(k/z_2 - d_j) \left[\frac{\bar{z}_2 - d_j}{z_2 - d_j} \right]^{m+1} + H_{m-1}^{(1)}(k/z_2 - d_j) \left[\frac{\bar{z}_2 - d_j}{z_2 - d_j} \right]^{-(m-1)} \right] e^{-i_2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中, d_j 是以 O_2 为原点时第 j 个 ($j=1, 2$) 半圆形凹陷中心的复坐标。

2.2.3 入射波和反射波

在复平面 (z_j, \bar{z}_j) 上,入射波和反射波可写为:

$$W_{(z_j, \bar{z}_j)}^{(i)} = W_0 e^{ik(z_j d_1 e^{i_1} + \bar{z}_j \bar{d}_1) e^{-i_1}} \quad (15)$$

$$W_{(z_j, \bar{z}_j)}^{(v)} = W_0 e^{ik(z_j - d_1)e^{-i} + (\bar{z}_j - \bar{d}_1)e^i} \tag{16}$$

其中, d_1 为以第 j 个 ($j=1, 2$) 半圆形凹陷圆心为原点时第一个半圆形凹陷中心复坐标, \bar{d}_1 为其共轭。相应的应力可表示为:

$$\tau_j^{(i)} = i\mu kW_0 \cos(\theta_j + \dots) e^{ik(z_j - d_1)e^{-i} + (\bar{z}_j - \bar{d}_1)e^i} \tag{17}$$

$$\tau_j^{(r)} = i\mu kW_0 \cos(\theta_j - \dots) e^{ik(z_j - d_1)e^{-i} + (\bar{z}_j - \bar{d}_1)e^i} \tag{18}$$

2.2.4 边界条件及定解方程组

将 2 个区域装配起来, 在复平面 (z_1, \bar{z}_1) 中满足公共边界 $C(S_1)$ 上应力、位移连续的边界条件; 同时在复平面 (z_2, \bar{z}_2) 中满足 S_2 上应力自由的边界条件。可得到定解方程组:

$$\begin{cases} W_{(z_1, \bar{z}_1)}^{(st)} = W_{(z_1, \bar{z}_1)}^{(i)} + W_{(z_1, \bar{z}_1)}^{(r)} + W_{s_1}^{(s)} + W_{s_2}^{(s)} & \text{在 } \bar{S}_1 \text{ 上} \\ \tau_{z_1}^{(st)} = \tau_{z_1}^{(i)} + \tau_{z_1}^{(r)} + \tau_{z_1, s_1}^{(s)} + \tau_{z_1, s_2}^{(s)} & \text{在 } \bar{S}_1 \text{ 上} \\ \tau_{z_2}^{(i)} + \tau_{z_2}^{(r)} + \tau_{z_2, s_1}^{(s)} + \tau_{z_2, s_2}^{(s)} = 0 & \text{在 } \bar{S}_2 \text{ 上} \end{cases} \tag{19}$$

将位移和应力的表达式带入式 (19), 然后在方程两边同时乘以 e^{-im} , 并在区间 $(-\dots, \dots)$ 上积分, 即得到决定未知系数 A_m, C_m ($j=1, 2$) 的无穷代数方程组。

2.3 地面位移幅值

研究半圆形凸起与凹陷相连的地形对 SH 波散射的影响, 就要求给出水平面上任一观察点上地震动变化与 SH 波的波数、入射角 的关系。对稳态 SH 波而言, 如果求得了观察点处的位移量, 即可求出该点的加速度值, 这对地震工程是至关重要的。

弹性半空间区域 中的总波场可以写成:

$$W^{(v)} = W^{(i)} + W^{(r)} + W_{s_1}^{(s)} + W_{s_2}^{(s)} \tag{20}$$

入射波波数为:

$$ka = a/c_s \tag{21}$$

或者

$$ka = 2 a/\dots \tag{22}$$

其中, 为入射波的波长, 或写为:

$$= 2a/\dots \tag{23}$$

3 算例与结果分析

作为算例, 如图 1 所示, 在坐标系 (z_1, \bar{z}_1) 中给出 $R/a=1.0$ 和 $R/a=0.5$ 两种情况下, SH 波以不同波数, 不同入射角 入射时地表位移幅值的变化情况。 $x/a = -1$ 点代表凸起地形与水平面相交处的几何位置, $x/a = 1$ 点代表半圆形凸起与凹陷相接点; $|x/a| < 1$ 代表凸起地形表面上各点。在图 3 中, $1 < x/a < 3$ 代表凹陷地形表面上各点, $x/a = 3$ 点代表凹陷地形与水平面相交处的几何位置, $x/a < -1$ 和 $x/a > 3$ 代表水平表面上诸点的位置。在图 4 中, $1 < x/a < 2$ 代表凹陷地形表面上诸点的位置, $x/a = 2$ 点代表凹陷地形与水平面相交处的几何位置, $x/a < -1$ 和 $x/a > 2$ 代表水平表面上诸点的位置。

(1) 图 3、图 4 分别给出 $R/a=1.0, R/a=0.5$ 时, SH 波以不同波数, 不同入射角 入射时, 地表位移幅值 $W^{(v)}$ 的变化情况。由图可见, $\theta=0$ 的准静态情况下, R/a 值越大, 水平地表和凸起、凹陷地形表面位移幅值受入射角度的影响越明显。当 $R/a=1.0$ 时, 随入射角的减小, 地表位移幅值逐渐增加, $\theta=0$ 时凸起部分位移幅值 $W^{(v)}$ 约为 2.75, 而 $\theta=90$ 时 $W^{(v)} = 2.3$, 大约提高 20% 左右; 当 $R/a=0.5$ 时, 这种影响仍然存在, 但不明显。当 $\theta=90$ 时, 不论 R/a 为何值, 与无凸起完整半空间表面上的位移幅值 2.0 相比, 地表位移幅值均提高 10% 以上。当 $\theta=0.25$, 即仍属低频状态的情况下, 凹陷的存在对凸起地形及凸起左侧水平地表的位移幅值有较大影响, 随 R/a 值的增大, 影响渐趋明显。 $R/a=1.0, \theta=0$ 时, 凸起部分位移幅值 $W^{(v)}$ 可达 3.6, 与半空间中单一凸起地形的位移幅值 $2.5^{[4]}$ 相比, 提高约 44%。 $\theta=0.75, 1.25$ 时, R/a 值的大小对凸起部分位移幅值的影响并不明显; 而随 R/a 值的增大, 凹陷地形本身表面位移幅值变化愈加激烈。

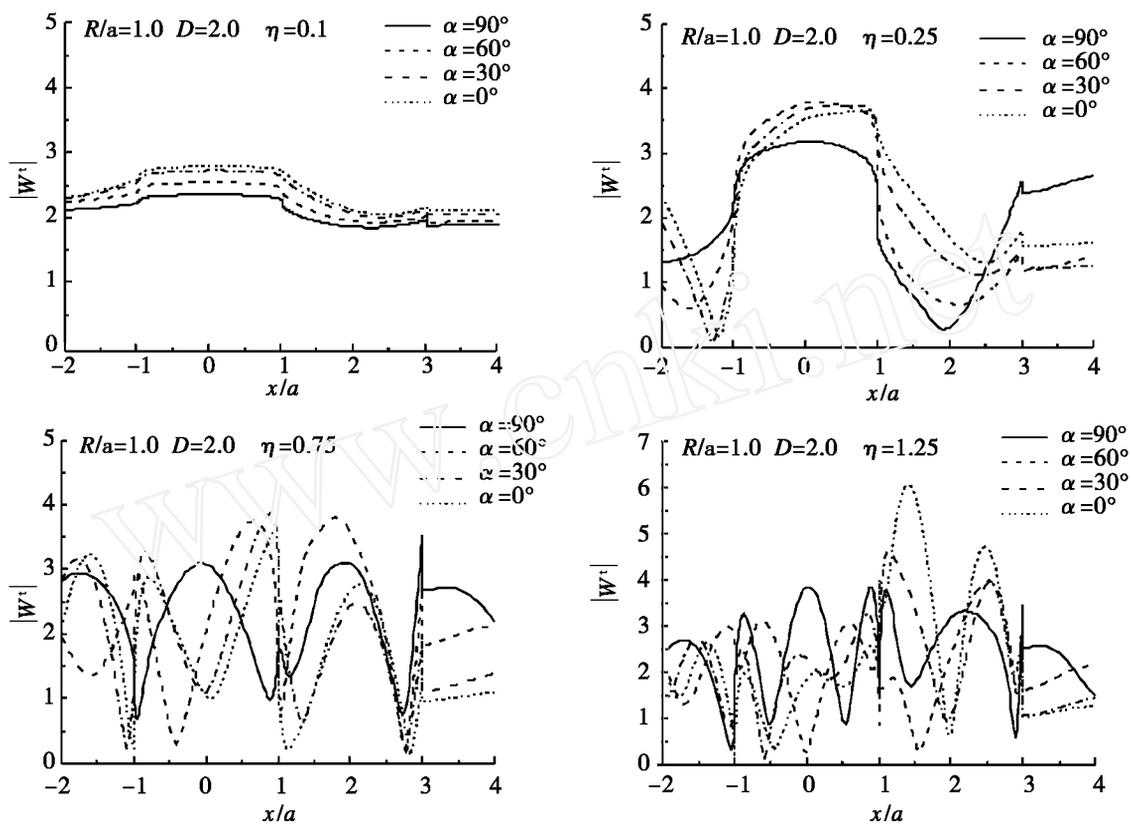


图 3 $R/a=1.0$ 时地表位移幅值随 x/a 的变化

Fig 3 Variation of surface displacement amplitudes with x/a when $R/a=1.0$

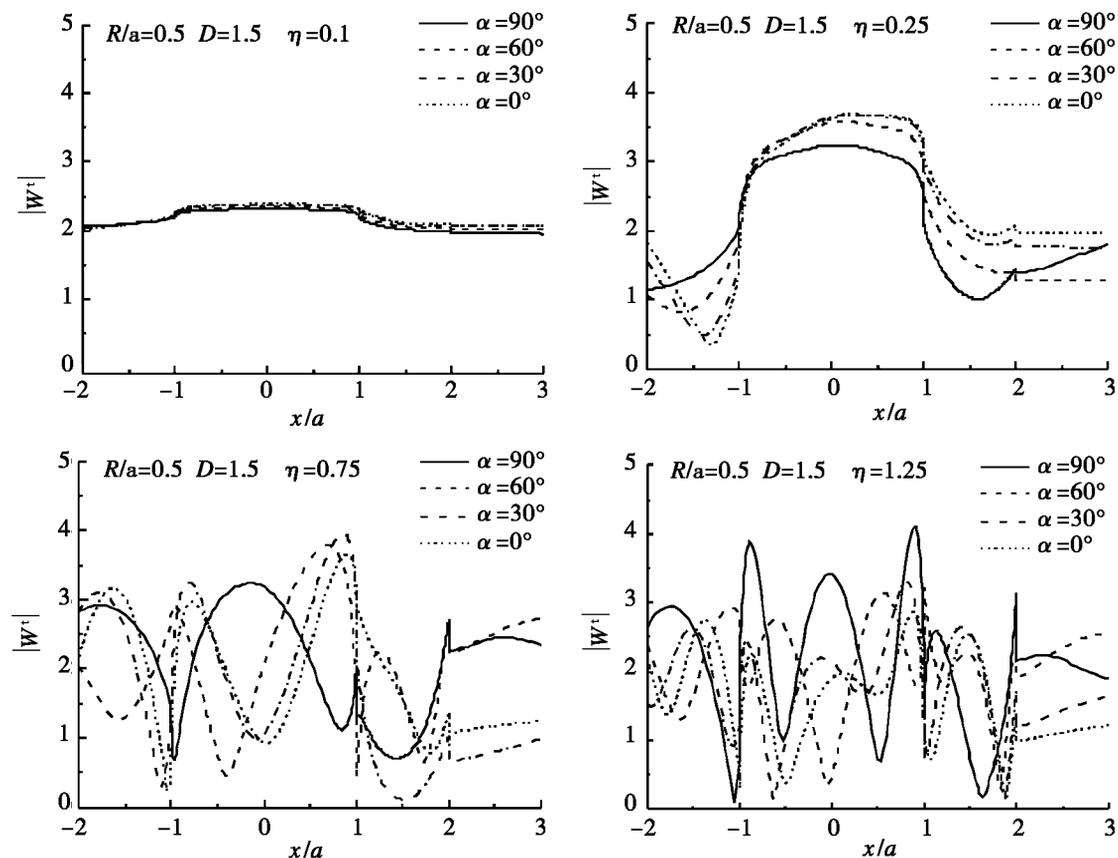


图 4 $R/a=0.5$ 时地表位移幅值随 x/a 的变化

Fig 4 Variation of surface displacement amplitudes with x/a when $R/a=0.5$

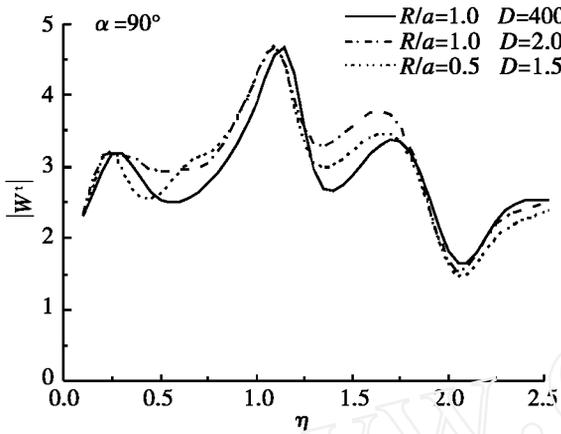


图 5 凸起顶点位移幅值反应谱

Fig 5 Response spectrum of displacement amplitudes

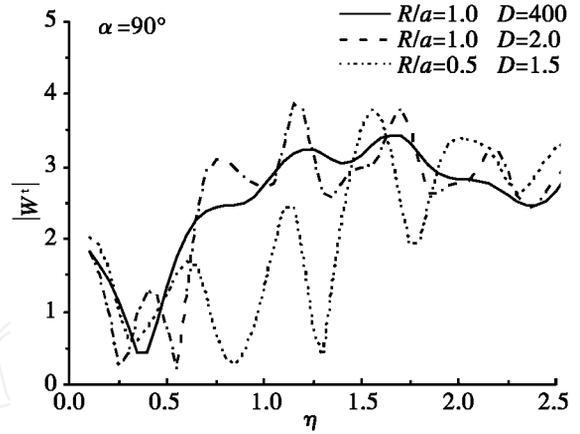


图 6 凹陷最低点处位移幅值反应谱

Fig 6 Response spectrum of displacement amplitudes of hill peak of canyon's lowest point

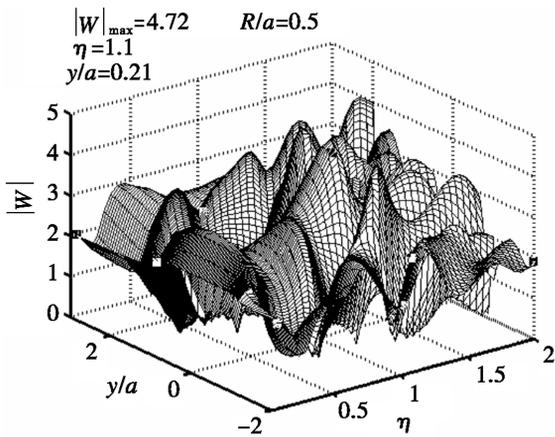


图 7 R/a=0.5时地表位移三维图

Fig 7 Surface displacement amplitudes of three dimensions when R/a=0.5

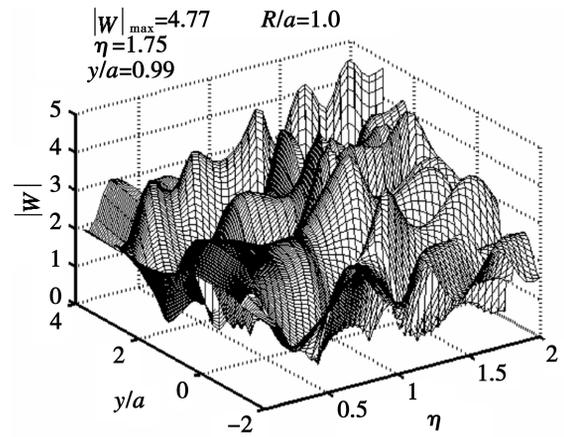


图 8 R/a=1.0时地表位移三维图

Fig 8 Surface displacement amplitudes of three dimensions when R/a=1.0

(2)图 5、图 6 给出 SH 波垂直入射时,半圆形凸起地形顶点及半圆形凹陷地形最低点处位移幅值的反应谱。由图 5 可知,当 $D=400$ 时,即半圆形凸起与凹陷圆心间距为凸起半径的 400 倍时,凹陷地形对凸起部分表面位移的影响可以忽略,凸起顶点位移幅值谱的变化规律与文献 [3] 一致。凸起与凹陷地形相连时,在 $\eta=0.5 \sim 1.0$ 和 $\eta=1.25 \sim 1.75$ 的频段内,凸起地形顶点位移受凹陷地形的影响比较明显,当 $\eta=1.25 \sim 1.75$ 时, R/a 值越大,凸起地形顶点位移幅值提高也越大。 $\eta=1.5$, $R/a=1.0$ 时,凸起顶点位移为 3.56,比 $R/a=0.5$ 时凸起顶点位移 3.2 提高约 10%。由图 6 可知, R/a 值较小时,凹陷地形最低点处位移幅值随 η 的增大呈现明显的振荡趋势,在 $\eta=0.5 \sim 2.0$ 频段内,变化尤为激烈。

(3)图 7、图 8 给出了 SH 波垂直入射,即 $\alpha=90^\circ$ 时, $R/a=0.5$, $R/a=1.0$ 两种情况下地表位移 $W^{(0)}$ 变化的三维图形。分别给出了地表位移最大幅值出现的位置与频率,建立了地表位移幅值变化的空间形象。

4 结论

(1)在低频状态下,凹陷地形的存在对凸起地形表面位移幅值有较大影响,且 R/a 值越大影响越明显。 $\eta=0.25$, $R/a=1.0$, $\alpha=0$ 时,由于凹陷的影响,凸起地形表面位移幅值可比半空间中单一凸起地形表面位移幅值提高 44%。 $\eta=1.0$ 的准静态情况下, R/a 值越大,随入射角的减小,凸起地形表面位移幅值增加明显

显。在 $\omega = 0.75, 1.25$ 的高低频状态下,凹陷地形对凸起部分位移幅值的影响并不明显,而随 R/a 值的增大,凹陷地形本身表面位移幅值变化激烈。

(2)在 $\omega = 0.5 \sim 1.0$ 和 $\omega = 1.25 \sim 1.75$ 的频段内,凸起地形顶点位移受凹陷地形的影响比较明显。 $\omega = 1.5, R/a = 1.0$ 时,凸起顶点处位移幅值可比半空间中单一凸起地形顶点处位移幅值提高 24%。对于凹陷地形,在 $\omega = 0.5 \sim 2.0$ 频段内,其最低点处位移幅值随 ω 的增大呈现明显的振荡趋势。

参考文献:

- [1] Trifunac M D. Scattering of plane sh-waves by a semi-cylindrical canyon[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1973, (1): 267 ~ 281.
- [2] Liu Diankui, Han Feng. Scattering of plane sh-waves by a cylindrical canyon of arbitrary shape[J]. Int. J. Soil Dynamic and Earthquake Engineering, 1991, 10(5): 249 ~ 255.
- [3] Yuan Xiaoming, Men Fulu. Scattering of plane SH-waves by a semi-cylindrical hill " [J]. Earthq. Eng. and Struct. Dynamics, 1992(21): 1091 ~ 1098.
- [4] 崔志刚,曹欣荣,刘殿魁. SH波对半圆形凸起地形的散射 [J]. 地震工程与工程振动, 1998, 18(1): 140 ~ 146.
- [5] 刘殿魁,曹欣荣,崔志刚. 多个半圆形凸起地形对平面 SH波散射 [J]. 固体力学学报, 1998, 特刊: 178 ~ 185.
- [6] 刘殿魁,许贻燕. 各向异性介质中 SH波与多个半圆形凹陷地形的相互作用 [J]. 力学学报, 1993, 25(1): 93 ~ 102.
- [7] Lee V W, Chen S, Hsu I R. Antiplane diffraction from canyon above subsurface[J]. Unlined Tunner A. S. C. E. Eng. Mech. Div, 1999, 125(2): 668 ~ 674.
- [8] 袁晓铭,廖振鹏. 任意圆弧形凸起地形对平面 SH波的散射 [J]. 地震工程与工程振动, 1996, 16(2): 1 ~ 3.
- [9] Wang G Q, Liu D K. Scattering of SH-wave by multiple circular cavities in half space[J]. EEEV, 2002, 1(1): 36 ~ 44.
- [10] 梁建文,张郁山. 圆弧形层状凹陷地形对平面 SH波的散射 [J]. 振动工程学报, 2003, 16(2): 158 ~ 165.
- [11] Qiu Faqiang, Liu Diankui. Antiplane response of isosceles triangular hill to incident SH waves[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2005, 4(1): 37 ~ 46.
- [12] 刘殿魁,王国庆. 浅埋圆形孔洞附近的半圆形凸起对 SH波的散射 [J]. 力学学报, 2006, 38(2): 209 ~ 218.