



多裂纹问题积分方程方法及相关问题^{*,**}

陈宜周[†]

江苏大学工程力学研究所, 镇江 212013

摘 要 综述了平面弹性力学多裂纹问题的一些近代先进解法. 一些基本解被着重提出, 它们是构成积分方程的基础. 这些基本解包括由点源引起和沿裂纹线分布载荷引起. 关于平面弹性力学多裂纹问题, 介绍了二类奇异积分方程, 三类 Fredholm 积分方程和一类超奇异积分方程. 文中还研究了奇异积分方程的正则化问题, 即转化为 Fredholm 积分方程的方法. 为了求解上述积分方程, 介绍了相应求积公式. 详细介绍求解其它众多多裂纹问题的各种方法阐明了关于多裂纹解的应用. 本文强调了修正复位函数这一概念的重要性, 因为它扩大了求解范围. 还研究了下列多裂纹问题: (1) 多半无限长裂纹问题, (2) 一般载荷情况下的多裂纹问题, (3) 黏合半平面情况下的多裂纹问题, (4) 有限区域的多裂纹问题, (5) 圆形域多裂纹问题, (6) 反平面弹性情况下的多裂纹问题, (7) 多裂纹问题中的 T 应力, (8) 周期裂纹问题及其它等等. 本综述共引用了 187 篇学术论文.

关键词 平面弹性力学, 多裂纹问题, 积分方程

1 引言

自从 Griffith 的开创性著作发表以来^[1], 研究者认识到脆性断裂和能量释放率间的密切关系. 与此同时, 人们发现能量释放率的计算和裂纹端应力强度因子的计算有密切关系. 从而, 许多研究者致力于应力强度因子计算的研究. 应力强度因子计算的结果主要用于下列情况. 在第 1 种情况中, 直接从开裂构件的裂纹端应力强度因子值估价该构件的安全. 其次, 已有一些公式表示了开裂构件的裂纹疲劳扩展率和应力强度因子的关系. 从而, 人们可以利用应力强度因子值来估算构件的疲劳寿命.

由断裂力学分析可知, 应力强度因子是裂纹终端应力场中奇异性项的一个系数. 在共线裂纹情况中, 裂纹前端应力场的奇异性项早由 Muskhelishvili 指出^[2]. 从此以后, 出版了许多有关裂纹端应力强度因子计算的著作^[3~17]. 虽然出版了不少有关著作, 但仍有许多应力强度因子计算方面的

问题有待解决. 例如, 在 20 世纪 80 年代, 研究者常用奇异积分方程解决裂纹问题, 但局限于位错密度为待求函数又作用力为右端项那种类型. 在那个年代, 其它方法很少得到发展. 此外, 许多应力强度因子手册的出版足以证明应力强度因子计算的重要性^[18~22].

显然, 对于裂纹问题的解法言, 已有方法尚未尽善尽美. 例如, 在积分方程和固体力学中, 裂纹问题中奇异积分方程正则化是一个重要的领域. 然而, Fredholm 积分方程在多裂纹问题中的应用出现在较晚时间. 又如, 晚近年代, 才有超奇异积分方程用于求解裂纹问题和多裂纹问题.

本文综述了平面弹性力学多裂纹问题的一些近代先进解法. 在本综述中, 不仅对多裂纹问题解法的基本理论得到了详细论述, 同时对于数值求解技术也作了阐明. 本文中分析了平面弹性力学多裂纹问题的基本问题. 此外, 一些重要公式, 例如 Poincare-Bertrand 等式, 也作了介绍. 一些基本解着重地提了出来, 它们是构成积分方程的基础.

* 国家自然科学基金 (10272053) 资助项目

** Applied Mechanics Reviews 惠允版权翻译此文 (Published with kind permission from Applied Mechanics Reviews, 2007, 60(4): 172~194 © 2007 by Applied Mechanics Reviews, <http://www.asmedl.org/AMR/>)

[†] E-mail: chens@ujs.edu.cn

向导数的特点在于,它不仅依赖于参量 z (即点的位置),同时也依赖于 $d\bar{z}/dz$ (即某一线段的方向).

在平面弹性力学中,特定方向导数这一概念是很重要的.人们熟知,平面弹性力学中的位移常常不表示为单纯解析函数的形式,而表示为下列形式,即 $\sum f_i(z)\overline{g_i(z)}$. 从而,在推导公式时,遇到特定方向导数是很自然的.此外,容易证明在倾斜截面上的作用力就是合力函数的一个特定方向导数.

在平面弹性力学中,经常用到下列积分式 [2,7,14,25]

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)dt}{t-z} \quad (7)$$

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)d\bar{t}}{t-z} \quad (8)$$

$$H(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}-\bar{z}}{(t-z)^2} h(t)dt \quad (9)$$

其中 L 为一条光滑曲线 (图 1). 此外,假定这些函数 $f(t)$, $g(t)$ 和 $h(t)$ 满足 Hölder 条件 [2,25]. $f(t)$, $g(t)$ 和 $h(t)$ 为密度函数.

在文献中,介绍了函数 $f(t)$ 在曲线 L 上满足 Hölder 条件的定义,此定义如下所示.对于曲线 L 上的任意二点,若有下列不等式成立

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq A |t_2 - t_1|^\mu \quad (10)$$

则说函数 $f(t)$ 在曲线 L 上满足 Hölder 条件. 式 (10) 中, A 和 μ ($0 < \mu \leq 1$) 为二个正值常数, A 为 Hölder 常数, μ 为 Hölder 指数. 很显然, 式 (7) 和 (8) 定义了二个解析函数, 而式 (9) 定义的则不是. 事实上, 式 (7) 定义就是熟知的 Cauchy 型积分.

一般地说, 当 $z \rightarrow t_0^+$ 或 $z \rightarrow t_0^-$ 时 ($t_0 \in L$), 这些函数会有不同的极限值 (图 1). 这些函数沿着曲线 L 的正侧和负侧极限值如下 [2,7,14]

$$F^\pm(t_0) = \pm \frac{f(t_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)dt}{t-t_0} \quad (11)$$

$$G^\pm(t_0) = \pm \frac{g(t_0)}{2} \frac{d\bar{t}_0}{dt_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)d\bar{t}}{t-t_0} \quad (12)$$

$$H^\pm(t_0, \bar{t}_0) = \pm \frac{h(t_0)}{2} \frac{d\bar{t}_0}{dt_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{(t-t_0)^2} h(t)dt \quad (13)$$

在式 (11), (12) 和 (13) 中, 所有积分均应看成主值积分. 式 (11) 称为 Plemelj 公式, 式 (12) 和 (13) 称为推广的 Plemelj 公式. 由式 (11) 可见, $F^+(t_0) - F^-(t_0) = f(t_0)$ ($t_0 \in L$). 此外, 位移沿

着裂纹线位置 L 是间断的. 这就是为何复变函数广泛地运用于裂纹问题中的一个基本的道理.

为了求出某些积分的主值, 若干基本公式介绍如下. 给出如下解析函数的定义

$$X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} \quad (14)$$

它定义于曲线 L 以外的区域 (图 1). 此外, 对此函数 $X(z)$ 取下列分支

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)/z = 1 \quad (15)$$

由此定义, 对此函数 $X(z)$, 又令 $z \rightarrow t^+$ 和 $z \rightarrow t^-$, 可得下列结果

$$X^+(t) = -X^-(t), t \in L \quad (16)$$

为方便计, 可令 $X^+(t) = X(t)$.

经一系列推导, 可得 [7,14]

$$\int_L \frac{X(t)R(t)dt}{t-t_0} = -\pi i \sum_n G_n(t_0), t_0 \in L \quad (17)$$

式中 $R(t)$ 为一有理函数, $\sum_n G_n(z)$ 为函数 $X(z)R(z)$ 的主要部分. 显然, 可得类同公式如下

$$\int_L \frac{R(t)dt}{X(t)(t-t_0)} = -\pi i \sum_n G_n(t_0), t_0 \in L \quad (18)$$

式中 $\sum_n G_n(z)$ 为函数 $R(z)/X(z)$ 的主要部分. 举例说, 若 L 变成区间 $(-a, a)$, 又取 $R(t) = t^2$, 可得

$$\int_{-a}^a \frac{X(t)t^2dt}{t-s} = -\pi i \left(z^3 - \frac{a^2z}{2} \right) \Big|_{z=s} = -\pi i \left(s^3 - \frac{a^2s}{2} \right), |s| < a \quad (19)$$

业已证明, 在多重奇异积分过程中, 最终积分值依赖于积分的次序 [25]. 著名的 Poincare-Bertrand 公式表明最终积分值依赖于积分的次序, 此式如下

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0} \int_L \frac{\psi(t, t_1)dt_1}{t_1-t} = -\pi^2 \psi(t_0, t_0) + \int_L dt_1 \int_L \frac{\psi(t, t_1)dt}{(t-t_0)(t_1-t)}, t_0 \in L \quad (20)$$

式中 L 为光滑曲线, 如图 1 所示, 函数 $\psi(t, t_1)$ 为一般的密度函数. 式 (20) 在奇异积分方程正则化时有用 [14].

今举出利用此式的例子如下. 对于位于区间 $(-a, a)$ 的一条裂纹, 相应的位错密度函数 $g'(t)$ 应满足下列二个方程

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g'(t)dt}{t-t_0} = p(t_0), |t_0| < a \quad (21)$$

$$\int_{-a}^a g'(t)dt = 0 \quad (22)$$

式中 $p(t_0)$ 为裂纹上的作用力, 第 2 个方程代表位移单值条件. 容易证明, 上列方程有如下解

$$g'(t) = -\frac{1}{\pi X(t)} \int_{-a}^a \frac{p(s)X(s)ds}{s-t}, |t| < a \quad (23)$$

式中

$$X(z) = \sqrt{z^2 - a^2}, \text{取下列分枝 } \sum_{\lim z \rightarrow \infty} X(z)/z = 1 \quad (24)$$

此解的正确性容易得到证明. 事实上, 把式 (23) 代入到式 (21) 中, 再利用 Poincare-Bertrand 公式, 等式 (21) 即可证明. 此外, 把式 (23) 代入到 (22), 易见式 (22) 恒得到满足.

3 平面弹性力学复变函数方法基本方程

在平面弹性力学中, 复变函数方法起了一个重要作用^[2]. 此方法的基本知识介绍如下. 在此法中, 应力分量 $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})$, 合力函数 (X, Y) 和位移分量 (u, v) 均通过一组复变函数 $\phi(z)$, $\psi(z)$ 或 $\phi(z)$, $\omega(z)$ 来表示

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\text{Re}\Phi(z) \\ \sigma_y - i\sigma_{xy} &= 2\text{Re}\Phi(z) + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} = \\ &\Phi(z) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \Omega(\bar{z}) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} f = -Y + iX &= \phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \\ &\phi(z) + (z - \bar{z})\overline{\phi'(z)} + \omega(\bar{z}) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} 2G(u + iv) &= \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} = \\ &\kappa\phi(z) - (z - \bar{z})\overline{\phi'(z)} - \omega(\bar{z}) \end{aligned} \quad (27)$$

式中 G 为剪切弹性模量, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 用于平面应力状态, $\kappa = 3 - 4\nu$ 用于平面应变状态, ν 为 Poisson 比. 在式 (25), (26) 和 (27) 中, 诸函数 $\omega(z)$, $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ 和 $\Omega(z)$ 由下式定义^[2]

$$\omega(z) = z\bar{\phi}'(z) + \bar{\psi}(z) \quad (28)$$

$$\Phi(z) = \phi'(z), \Psi(z) = \psi'(z), \Omega(z) = \omega'(z) \quad (29)$$

值得注意, 式 (28) 中的函数 $\bar{\psi}(z)$ 是通过一个已知解析函数 $\psi(z)$ 来定义的一个解析函数, 它的定义如下^[2]

$$\bar{\psi}(z) = \overline{\psi(\bar{z})} \quad (30)$$

除了上述物理量外, 由式 (26) 和 (27) 可以定义二个特定方向导数如下

$$\begin{aligned} J_1 \left(z, \bar{z}, \frac{d\bar{z}}{dz} \right) &= \frac{d}{dz} \{-Y + iX\} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \\ &\frac{d\bar{z}}{dz} (z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) = N + iT \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} J_2 \left(z, \bar{z}, \frac{d\bar{z}}{dz} \right) &= 2G \frac{d}{dz} \{u + iv\} = \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \\ &\frac{d\bar{z}}{dz} (z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) = (\kappa + 1)\Phi(z) - J_1 \end{aligned} \quad (32)$$

容易证明, $J_1 = N + iT$ 是沿着 $\overline{z}, z + d\bar{z}$ 的法向和切向作用力构成的复数值 (图 1). 其次, J_1 和 J_2 不仅依赖于参量 z (即点的位置), 同时也依赖于 $d\bar{z}/dz$ (即某一线段的方向). 平面弹性力学复变函数方法的详细推导可见文 [2,4,5,7,13,14,23~25].

最近, 平面弹性力学中新的复位函数的构成得到介绍^[26]. 在该文中, 定义了一个由位移和合力函数构成的解析函数.

4 基于点源引起的基本解

在断裂力学中, 基于点源引起的基本法解起着重要的作用. 例如, 平面弹性力学中的曲线裂级问题可由连续分布的位错密度或用开口位移密度来模拟^[27]. 若以分布力为积分方程右端项, 在前一情况得到奇异积分方程, 在后一情况得到超奇异积分方程. 下面, 共介绍 4 种基本解.

4.1 4 种点源引起的基本解

若有点位错放在点 $z = t$ 处如图 2(a) 所示, 相应复位函数为^[14]

$$\begin{aligned} \phi(z) &= H \log(z - t) \\ \Phi(z) &= \phi'(z) = \frac{H}{z - t} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\Phi'(z) = -\frac{H}{(z - t)^2}$$

$$\psi(z) = \bar{H} \log(z - t) - \frac{H\bar{t}}{z - t} \quad (34)$$

$$\Psi(z) = \psi'(z) = \frac{\bar{H}}{z - t} + \frac{H\bar{t}}{(z - t)^2}$$

式中 $H = H_x + iH_y$ 代表点 $z = t$ 处的位错密度.

令 $\{f\}_t$ 表示参量 f 绕点 $z = t$ 一周时围道增量, 如图 2(a) 所示. 显然, 由式 (26) 和 (27) 可得

$$\begin{aligned} \{f\}_t &= \{-Y + iX\}_t = 0 \\ 2G\{u + iv\}_t &= 2(\kappa + 1)H\pi i \end{aligned} \quad (35)$$

上述得到的解称为第 1 种基本解. 显然, 利用第 1 种基本解又令分布位错密度沿曲线分布, 便可得曲线裂纹的奇异积分方程.

在构成基于点源位错引起的基本解时, 很自然要引入二个多值形式, 或对数形式的复位函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ ^[2]. 此时, 位移分量是多值的. 对于真实的裂纹问题言, 位移必须单值. 在曲线裂纹的奇异积分方程中, 此方程是用分布位错的积累来构成的. 为了位移单值性, 对于分布位错尚需一个约束方程式. 这类方程如式 (22) 所示, 下面的式 (65) 也属于这类方程.

若有集中力 $P_x + iP_y$ 作用在点 $z = t$ 处, 如图 2(b) 所示, 相应复位函数为^[14]

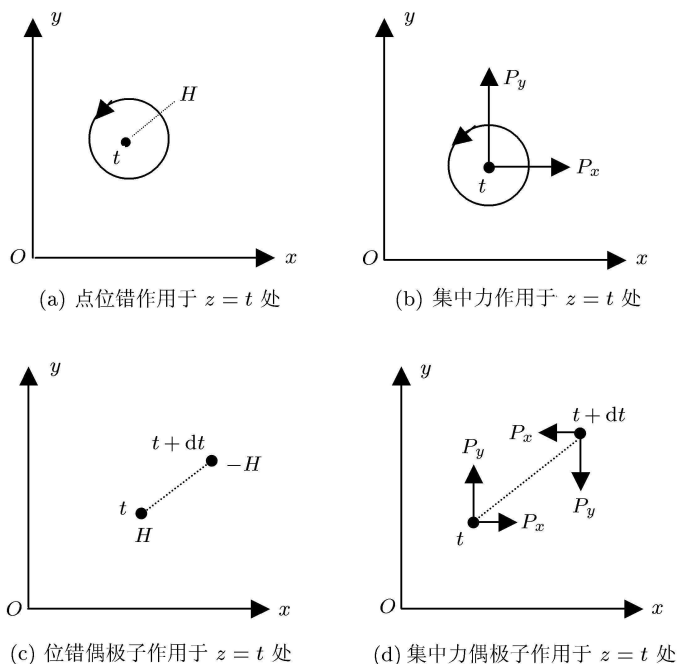


图 2

类似地, 可得下列围道增量值

$$\begin{aligned} \phi(z) &= F \log(z - t) \\ \Phi(z) &= \phi'(z) = \frac{F}{z - t} \\ \Phi'(z) &= -\frac{F}{(z - t)^2} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \{-Y + iX\}_t &= 2(\kappa + 1)F\pi i = P_y - iP_x \\ 2G\{u + iv\}_t &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

上述得到的解称为第 2 种基本解. 这类基本解可用于刚性线问题的积分方程中.

若有位错偶极子 $H = H_x + iH_y$ ($-H$) 相应地设置在点 $z = t$ ($z = t + dt$) 时, 见图 2(c). 由式 (33) 和 (34), 相应于此位错偶极子的复位函数如下^[14]

$$\begin{aligned} \psi(z) &= -\kappa\bar{F} \log(z - t) - \frac{F\bar{t}}{z - t} \\ \Psi(z) &= \psi'(z) = -\frac{\kappa\bar{F}}{z - t} + \frac{F\bar{t}}{(z - t)^2} \end{aligned} \quad (37)$$

式中

$$F = F_x + iF_y = -\frac{P_x + iP_y}{2\pi(\kappa + 1)} \quad (38)$$

$$\phi(z) = H[\log(z - t) - \log(z - t - dt)] = -H \frac{dt}{t - z} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \bar{H} [\log(z-t) - \log(z-t-dt)] - \\ & H \left[\frac{\bar{t}}{z-t} - \frac{\bar{t}+d\bar{t}}{z-t-dt} \right] = \\ & -\bar{H} \frac{dt}{t-z} - H \frac{d\bar{t}}{t-z} + H \frac{\bar{t}dt}{(t-z)^2} \end{aligned} \quad (41)$$

上述得到的解称为第 3 种基本解. 这类基本解用于多裂纹问题的奇异积分方程中.

类似地, 若有集中力偶极子 $P = P_x + iP_y$ ($-P$) 相应地设置在点 $z = t$ ($z = t + dt$) 时, 见图 2(d), 由式 (36) 和 (37), 可得相应于此集中力偶极子的复位函数如下^[14]

$$\phi(z) = -F \frac{dt}{t-z} \quad (42)$$

$$\psi(z) = \kappa \bar{F} \frac{dt}{t-z} - F \frac{d\bar{t}}{t-z} + F \frac{\bar{t}dt}{(t-z)^2} \quad (43)$$

式中 F 已由式 (38) 定义. 上述得到的解称为第 4 种基本解.

4.2 位错偶极子和集中力偶极子间的关系

已经证明, 位错偶极子解是一对互相垂直集中力偶极子解的线性组合^[27]. 从而, 在裂纹问题

中, 位错偶极子解法和集中力偶极子解法是等价的^[27~29]

在第 1 种情况, 强度为 $H = H_x$ 和 $-H = -H_x$ 的位错偶极子设置在点 $z = t$ 处, 见图 3(a). 利用式 (40) 至 (43) 可以证明, 图 3(a) 情况中一对位错偶极子构成的复位函数等价于图 3(b) 情况中二对集中力偶极子构成的复位函数. 在图 3(b) 中, 一对集中力偶极子由力 P 构成, 另一对由力 $(3-\kappa)P/(1+\kappa)$ 构成. 此外, 还应有下列式子成立^[27]

$$H_x = \frac{(\kappa-1)}{\pi(\kappa+1)^2} P \quad (44)$$

在第 2 种情况, 强度为 $H = iH_y$ 和 $-H = -iH_y$ 的位错偶极子设置在点 $z = t$ 处, 见图 3(c). 利用式 (40) 至 (43) 可以证明, 图 3(c) 情况中一对位错偶极子构成的复位函数等价于图 3(d) 情况中二对集中力偶极子构成的复位函数. 在图 3(d) 中, 一对集中力偶极子由水平方向力 Q 构成, 另一对由垂直方向力 Q 构成. 此外, 还应有下列式子成立^[27]

$$H_y = -\frac{Q}{\pi(\kappa+1)} \quad (45)$$

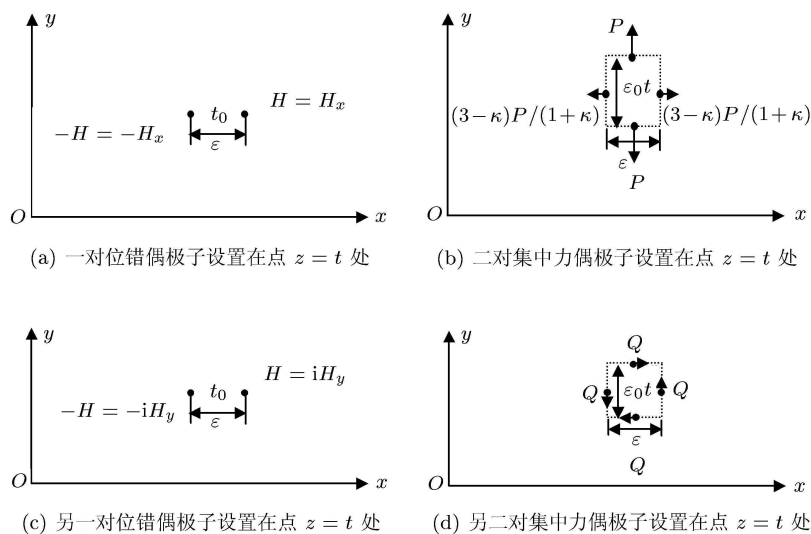


图 3

4.3 黏合双材料的二维 Green 函数

黏合双材料的二维 Green 函数曾被研究过^[30]. 今假设奇点 $z = t$ 处在上半平面, 又上 (下) 半平面材料的弹性常数各为 $G_1, \nu_1, \kappa_1 = 3 - 4\nu_1$ ($G_2, \nu_2, \kappa_2 = 3 - 4\nu_2$).

设有一点位错处在各向同性材料全平面的上

半平面中, 此时, 相应的复位函数的奇异解为

$$\begin{aligned} \phi_{1p}(z) &= H \log(z-t) \\ \psi_{1p}(z) &= \bar{H} \log(z-t) - \frac{H\bar{t}}{z-t} \end{aligned} \quad (46)$$

与此同时, 设有一点位错处在黏合半平面的上半

平面中, 此时, 相应的复位函数可表示为

$$\phi_1(z) = \phi_{1p}(z) + \phi_{1c}(z), \quad (47)$$

$$\psi_1(z) = \psi_{1p}(z) + \psi_{1c}(z), z \in \text{上半平面}$$

$$\phi_2(z), \psi_2(z), z \in \text{下半平面} \quad (48)$$

由沿着实轴的作用力和位移连续条件, 可得

$$\begin{bmatrix} \phi_1(z) \\ \psi_1(z) \end{bmatrix} = \mathbf{I} \begin{bmatrix} \phi_{1p}(z) \\ \psi_{1p}(z) \end{bmatrix} + \mathbf{I}_1 \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{1p}(z) \\ \bar{\psi}_{1p}(z) \end{bmatrix} + \mathbf{I}_2 \begin{bmatrix} z\bar{\phi}'_{1p}(z) \\ z\bar{\psi}'_{1p}(z) \end{bmatrix} + \mathbf{I}_3 \begin{bmatrix} z^2\bar{\phi}''_{1p}(z) \\ z^2\bar{\psi}''_{1p}(z) \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_2(z) \\ \psi_2(z) \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1 \begin{bmatrix} \phi_{1p}(z) \\ \psi_{1p}(z) \end{bmatrix} + \mathbf{J}_2 \begin{bmatrix} z\phi'_{1p}(z) \\ z\psi'_{1p}(z) \end{bmatrix} \quad (50)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{I}_2 &= \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ -\beta & \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_1 &= \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1+\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta-\alpha & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\alpha = \frac{\kappa_1 G_2 - \kappa_2 G_1}{G_2 + \kappa_2 G_1}, \quad \beta = \frac{G_2 - G_1}{G_1 + \kappa_1 G_2} \quad (52)$$

在文献中, 矩阵 $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{I}_3$ 称为反射型的, 而矩阵 $\mathbf{J}_1$ 和 $\mathbf{J}_2$ 称为传递型的. 值得指出, 式 (49) 和 (50) 是通用的, 和二函数 $\phi_{1p}(z)$ 和 $\psi_{1p}(z)$ 的具体结构无关. 得到的 Green 函数对于构成黏合半平面的边界积分方程是重要的.

黏合双材料的 Green 函数可用另一种方法来构成^[31]. 在该法中, 可用三维核作为出发点. 令三维核在 z 方向上沿 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分, 乃得此方向的核分布的连续线又形成了平面应变条件. 从而, 可得

$$F_{2D} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{3D} dz \quad (53)$$

式中 F_{3D} 是三维核, 而 F_{2D} 是相应于 F_{3D} 的二维核.

5 基于分布位错或分布作用力构成的基本解

由于多裂纹问题可以看成若干单裂纹问题的迭加, 单裂纹的二种基本解介绍如下.

5.1 裂纹表面作用有大小相等方向相反载荷时的解

本节要讨论单条裂纹情况时的解. 取决于所用的方法, 有二种方法建立单条裂纹情况时的解. 在第 1 种情况中, 裂纹表面作用有大小相等方向相反的作用力, 而远处无力作用 (图 4(a)). 此时, 边界条件如下

$$(\sigma_y - i\sigma_{xy})^+ = (\sigma_y - i\sigma_{xy})^- = P(t) - iQ(t), |t| < a \quad (54)$$

式中 $P(t)$ 和 $Q(t)$ 代表裂纹表面的法向和切向作用力, (+) (或 (-)) 表示裂纹的上侧 (或下侧).

利用式 (25), 可得下列 Riemann-Hilbert 问题^[2]

$$\begin{aligned} [\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2(P(t) - iQ(t)) \\ |t| &< a \\ [\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- &= 0, |t| < a \end{aligned} \quad (55)$$

此时, 很容易得到此问题的解如下

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{-a}^a \frac{(P(t) - iQ(t)) X(t) dt}{t - z} \quad (56)$$

$$\Psi(z) = \bar{\Omega}(z) - z\Phi'(z) - \Phi(z) \quad (57)$$

式中 $X(z)$ 和 $X(t)$ ($X(t) = X^+(t) = -X^-(t)$) 已在前面定义过. 已经证明, 式 (56) 和 (57) 所示的复位函数恒满足位移单值条件. 由此解答, 可以立即求出在任一点处相应的作用力 $N + iT$, 见图 1. 这一点在构成多裂纹的 Fredholm 积分方程时是极为重要的.

由此复位函数, 在右纹裂端 B 处 (图 4(a)), 应力强度因子可定义为^[14,32,33]

$$K_1 - iK_2 = \lim_{z \rightarrow a} 2\sqrt{2\pi(z-a)}\Phi(z) \quad (58)$$

此外, 应力强度因子也可定义为

$$K_1 - iK_2 = \lim_{x \rightarrow a, x > a} \sqrt{2\pi(x-a)}(\sigma_y - i\sigma_{xy}) \quad (59)$$

把式 (56) 代入 (58) 可得

$$(K_1 - iK_2)_B = -\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a (P(t) - iQ(t)) \sqrt{\frac{a+t}{a-t}} dt \quad (60)$$

类似, 在左裂纹端 A 处有

$$(K_1 - iK_2)_A = -\frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a (P(t) - iQ(t)) \sqrt{\frac{a-t}{a+t}} dt \quad (61)$$

在第 2 种情况中, 图 4(a) 所示的问题由连续分布的位错密度来模拟 [7,14]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{g'(t)dt}{t-z} \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\overline{g'(t)}dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{tg'(t)dt}{(t-z)^2} \end{aligned} \quad (62)$$

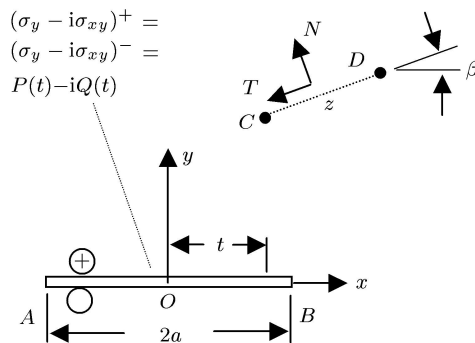
式中位错密度 $g'(t)$ 可定义为

$$g'(t) = -\frac{2Gi}{\kappa+1} \frac{d}{dt} [(u(t) + iv(t))^+ - (u(t) + iv(t))^-] \quad (63)$$

$$|t| < a$$

式中 $(u(t) + iv(t))^+$ 或 $((u(t) + iv(t))^-)$ 是裂纹上侧或下侧的位移. 只要计算出由式 (62) 导出的 $J_1 = N + iT$ 值, 便得到下列奇异积分方程

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g'(t)dt}{t-t_0} = P(t_0) - iQ(t_0), |t_0| < a \quad (64)$$



(a) 裂纹表面作用的大小相等方向相反载荷

此外, 位错密度函数 $g'(t)$ 尚须满足下列位移单值条件

$$\int_{-a}^a g'(t)dt = 0 \quad (65)$$

再者, Cauchy 积分的反演给出 [2,7,14,25,32]

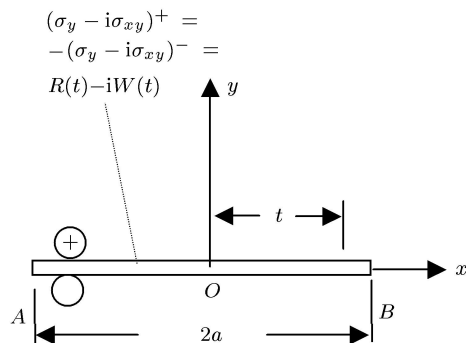
$$g'(t) = -\frac{1}{\pi X(t)} \int_{-a}^a \frac{(P(s) - iQ(s))X(s)ds}{s-t} \quad (66)$$

$$|t| < a$$

在左裂纹端 A 和右裂纹端 B 处, 应力强度因子可由下式求出

$$\begin{aligned} (K_1 - iK_2)_A &= (2\pi)^{1/2} \lim_{t \rightarrow -a} \sqrt{|t+a|} g'(t) \\ (K_1 - iK_2)_B &= -(2\pi)^{1/2} \lim_{t \rightarrow a} \sqrt{|t-a|} g'(t) \end{aligned} \quad (67)$$

由式 (66) 和 (67), 可得如式 (60) 和 (61) 所示的同样结果.



(b) 裂纹表面作用的大小相等方向相同的载荷

图 4

5.2 裂纹表面作用有大小相等方向相同载荷时的解

在第 2 种情况中, 裂纹表面作用有大小相等方向相同的作用力 (图 4(b)). 此时, 边界条件如下

$$\begin{aligned} (\sigma_y - i\sigma_{xy})^+ &= -(\sigma_y - i\sigma_{xy})^- = R(t) - iW(t) \\ |t| < a \end{aligned} \quad (68)$$

式中 $R(t)$ 和 $W(t)$ 代表裂纹表面的法向和切向作用力, (+)(或 (-)) 表示裂纹的上侧 (或下侧).

类似, 可得下列 Riemann-Hilbert 问题 [2]

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 0$$

$$|t| < a$$

$$[\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- =$$

$$2(R(t) - iW(t)), |t| < a \quad (69)$$

此时, 很容易得到此问题的解如下

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{-a}^a (R(t) - iW(t)) dt \pm \\ \Omega(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{(R(t) - iW(t)) dt}{t-z} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\Psi(z) = \bar{\Omega}(z) - z\Phi'(z) - \Phi(z) \quad (71)$$

分析函数 $\Phi(z)$ 在点 $z = a$ 邻域的性质如下. 考虑到 Cauchy 型积分在积分区间端点处的性质^[25], 由式 (70) 可得

$$\Phi(z) = c(z-a)^{-1/2} - \frac{R(a) - iW(a)}{2\pi i} \log \frac{1}{z-a} + f(z) \quad (72)$$

式中 c 为一常数, $f(z)$ 是点 $z = a$ 邻域的解析函数. 在式 (72) 中, 裂纹线可看成解析函数的分枝切割线. 这一结果表明, 裂纹端处除了 $-\frac{1}{2}$ 奇异性, 还存在着对数型奇异性^[14].

类似, 裂纹端应力强度因子可由下式得出 (见图 4(b))

$$(K_1 - iK_2)_B = -(K_1 - iK_2)_A = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a (W(t) + iR(t)) dt \quad (73)$$

若同前一情况对比, 可以看出本情况中的一些特点: (1) 在裂纹端处, 复位函数有对数型奇异项; (2) 应力强度因子值依赖于弹性常数 κ ; (3) 法向作用力 $R(t)$ 引起第二型应力强度因子 K_2 , 而法切向作用力 $W(t)$ 引起第一型应力强度因子 K_1 ; (4) 有下列关系式存在 $(K_1 - iK_2)_B = -(K_1 - iK_2)_A$.

5.3 裂纹端邻近应力的对数奇异性

如上所述, 当裂纹表面作用有大小相等方向相同的作用力时, 裂纹端邻近应力存在着对数奇异性^[14]. 相应于此奇异性, 裂纹端邻近应力场可表示为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 4g_1 \log r - 2g_2\theta - g_1(\cos 2\theta - 1) - g_2 \sin 2\theta \\ \sigma_y &= -2g_2\theta + g_1(\cos 2\theta - 1) + g_2 \sin 2\theta \\ \sigma_{xy} &= -2g_1\theta + g_2(\cos 2\theta - 1) - g_1 \sin 2\theta \end{aligned} \quad (74)$$

式中 g_1 和 g_2 为二个常系数. 由式 (74) 可见, (1) 仅当 $g_1 \neq 0$, 才有应力的对数奇异性; (2) 应力分量 σ_y 和 σ_{xy} 常为有限值.

在切口问题中, 许多学者研究了应力的对数奇异性问题^[34,35].

6 多裂纹问题的第 1 类奇异积分方程及其正则化

介绍多裂纹问题的第 1 类奇异积分方程. 此外, 还给出了此方程的二种正则化方法. 相应的解法也一一作了介绍.

6.1 多裂纹问题的第 1 类奇异积分方程

在平面弹性力学的裂纹问题中, 积分变换方法和复变函数方法是重要的工具. 不过, 当多裂纹互在倾斜位置时, 积分变换方法就变得难以求解. 业已证明, 复变函数方法给出更广泛的求解范围^[14].

基于点位错引出的基本解及相应的复位函数, 可得多裂纹问题的第 1 类奇异积分方程如下^[7,36]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-a_k}^{a_k} \frac{g'_k(t) dt}{t - s_k} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{-a_j}^{a_j} [g'_j(s_j) K_{jk}(s_j, s_k) + \\ \overline{g'_j(s_j)} L_{jk}(s_j, s_k)] ds_j = \\ = p_k(s_k) - iq_k(s_k), |s_k| < a_k, k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (75)$$

式中 $p_k(s_k) - iq_k(s_k)$ 和 $g'_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, N$) 代表沿裂纹分布的载荷和位错密度 (图 5(b)). 记号 $\sum'$ 表示对 $j = kh$ 的项不包括在求和式中, $K_{jk}(s_j, s_k)$ 和 $L_{jk}(s_j, s_k)$ 表示下列二个正常的积分核^[7]

$$\begin{aligned} K_{jk}(s_j, s_k) &= \frac{1}{2} \exp(i\alpha_j) \left[\frac{1}{T_j - T_k} + \right. \\ &\quad \left. \exp(-2i\alpha_k) \frac{1}{T_j - \bar{T}_k} \right] \\ L_{jk}(s_j, s_k) &= \frac{1}{2} \exp(-i\alpha_j) \left[\frac{1}{T_j - \bar{T}_k} - \right. \\ &\quad \left. \exp(-2i\alpha_k) \frac{T_j - T_k}{(T_j - \bar{T}_k)^2} \right] \end{aligned} \quad (76)$$

$$T_k = z_{k0} + s_k \exp(i\alpha_k), k = 1, 2, \dots, N \quad (77)$$

显然, 积分核 $K_{jk}(s_j, s_k)$ 和 $L_{jk}(s_j, s_k)$ 依赖于: (1) 源点和观察点的位置; (2) 第 j 条和第 k 条裂纹的倾斜位置, 从而, 此函数属于二点二方向函数. 积分方程 (75) 称为多裂纹问题的第 1 类奇异积分方程 (S1 型).

位移单值条件导致下列方程

$$\int_{-a_k}^{a_k} g'_k(t) dt = 0, (k = 1, 2, \dots, N) \quad (78)$$

式 (75) 和 (78) 构成了多裂纹问题的全部方程式. 利用这些方程, 也可以解决十字型和分岔裂纹问题^[37,38].

6.2 正则化方法

有二种对方程进行正则化. 在第 1 种方法中, 对式 (75) 进行下列运算

$$\int_{-a_k}^{a_k} [\dots] (a_k^2 - s_k^2)^{1/2} \frac{ds_k}{s_k - r_k} \quad (79)$$

再者, 采用下列步骤: (1) 利用 Poincare-Bertrand 公式 (20); (2) 利用积分式 (11), (12) 和 (13), 可得下列 Fredholm 积分方程 [39]

$$G_k(s_k) + \sum_{j=1}^N \int_{-a_j}^{a_j} [G_j(s_j) \tilde{K}_{jk}(s_j, s_k) + \overline{G_j(s_j)} \tilde{L}_{jk}(s_j, s_k)] ds_j = -\frac{1}{\pi} \int_{-a_k}^{a_k} (p_k(t) - iq_k(t)) (a_k^2 - t^2)^{1/2} \cdot \frac{dt}{t - s_k}, |s_k| < a_k, k = 1, 2, \dots, N \quad (80)$$

式中

$$G_k(t) = (a_k^2 - t^2)^{1/2} g'_k(t), |t| < a_k, k = 1, 2, \dots, N \quad (81)$$

又二个积分核 $\tilde{K}_{jk}(s_j, s_k)$ 和 $\tilde{L}_{jk}(s_j, s_k)$ 为正常函数 [14]. 积分方程 (80) 也可从式 (75) 所示的 Cauchy 积分的反演得到. 此外, 由积分方程 (80) 得到的解 $G_k(s_k)$ 恒满足位移单值条件 [39]. 方程 (80) 是 Fredholm 积分方程, 称为 R1A 型. 对于圆板中的多裂纹问题, 研究者介绍了类似的方程 [40,41].

此奇异积分方程的第 2 种正则化方法介绍如下. 在式 (75) 中, 可引入下列代换 [14,42]

$$g'_k(t) = -\frac{1}{\pi X_k(t)} \int_{-a_k}^{a_k} \frac{(P_k(s) - iQ_k(s)) X_k(s) ds}{s - t} \quad (82)$$

式中

$$X_k(t) = X_k^+(t) = -X_k^-(t) = i\sqrt{a_k^2 - t^2}, |t| < a_k \quad (83)$$

再者, 采用下列步骤: (1) 利用 Poincare-Bertrand 公式 (20), (2) 利用积分式 (11), (12) 和 (13), 可得下

列 Fredholm 积分方程 [14,42]

$$P_k(s_k) - iQ_k(s_k) + \sum_{j=1}^N \int_{-a_j}^{a_j} [P_j(s_j) - iQ_j(s_j)] \cdot C_{jk}(s_j, s_k) ds_j + \sum_{j=1}^N \int_{-a_j}^{a_j} [P_j(s_j) + iQ_j(s_j)] \cdot D_{jk}(s_j, s_k) ds_j = p_k(s_k) - iq_k(s_k) \quad (84)$$

|s_k| < a_k, k = 1, 2, \dots, N

式中

$$C_{jk}(s_j, s_k) = -\frac{X_j(s_j)}{2\pi i} [G_j(t_{jk}, s_j) + \exp(2i(\alpha_j - \alpha_k)) \overline{G_j(t_{jk}, s_j)}] \quad (85)$$

$$D_{jk}(s_j, s_k) = -\frac{X_j(s_j)}{2\pi i} [(1 - \exp(2i(\alpha_j - \alpha_k))) \cdot \overline{G_j(t_{jk}, s_j)} + \exp(2i(\alpha_j - \alpha_k)) \cdot (t_{jk} - \bar{t}_{jk}) \overline{G'_j(t_{jk}, s_j)}]$$

$$G_j(z, s) = \frac{1}{X_j(z)(z - s)} \quad (86)$$

$$G'_j(z, s) = \frac{a_j^2 + sz - 2z^2}{(X_j(z))^3(z - s)^2}$$

$$t_{jk} = \exp(-i\alpha_j)(z_{ko} + s_k \exp(i\alpha_k) - z_{jo})$$

$$X_j(z) = \sqrt{z^2 - a_j^2}$$

在上式中, 二个积分核 $C_{jk}(s_j, s_k)$ 和 $D_{jk}(s_j, s_k)$ 为正常函数. 此外, 式 (82) 恒满足位移单值条件 [14]. 得到的积分方程 (84) 是 Fredholm 积分方程, 称为 R1B 型. 若在第 $j-t$ 裂纹上设置分布作用力 $P_j(s_j) - iQ_j(s_j)$ ($j = 1, 2, \dots, N$), 又利用迭加原理, 同样可得积分方程 (84)(参见图 5(c)).

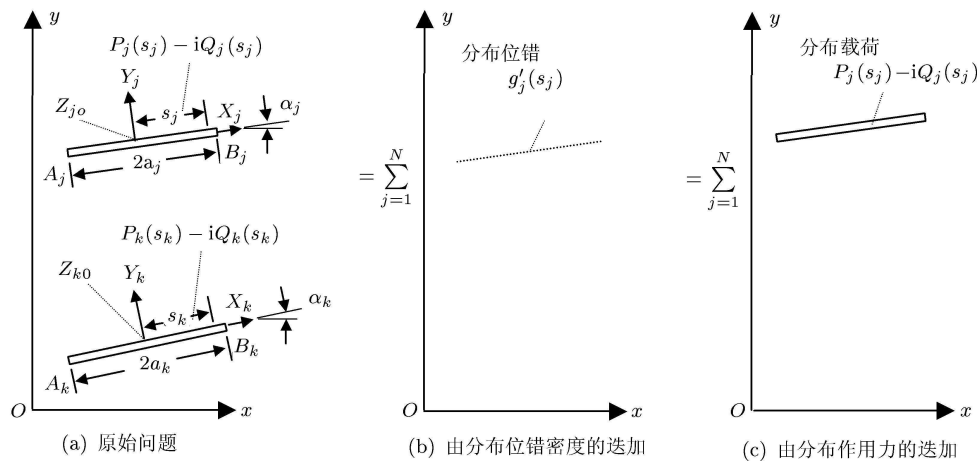


图 5 多裂纹问题的迭加方法

6.3 数值积分

为了得到下列诸方程的数值解, 即 (1) 式 (75) 结合式 (78) 的奇异积分方程; (2) 式 (80) 和 (84) 所示的 Fredholm 积分方程, 只要利用下列求积公式 [7,14,43].

$$\int_{-a}^a \frac{G(t)dt}{\sqrt{a^2-t^2}(t-s_m)} = \frac{\pi}{M} \sum_{j=1}^M \frac{G(t_j)}{t_j-s_m} \quad (87)$$

$m = 1, 2, \dots, M-1, M$ 为整数

$$\int_{-a}^a \frac{G(t)dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \frac{\pi}{M} \sum_{j=1}^M G(t_j) \quad (88)$$

式中

$$\begin{aligned} t_j &= a \cos \frac{(2j-1)\pi}{2M}, j = 1, 2, \dots, M \\ s_m &= a \cos \frac{m\pi}{M}, m = 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (89)$$

一旦积分方程解出后, 裂纹端的应力强度因子容易求出 [14].

6.4 多裂纹问题解的迭加方法

从单裂纹表面作用有载荷时的解出发, 可得多裂纹问题的一组方程式. 由此方程可求出直线裂纹端的应力强度因子 [44]. 设位于 $(-a, a)$ 上的单裂纹受有下列载荷

$$p(x) = \sigma_y^+ - i\sigma_{xy}^+ = \sigma_y^- - i\sigma_{xy}^-, |x| < a \quad (90)$$

从上述边界条件求解复变函数的 Riemann-Hilbert 问题后, 可得复位函数的下列解答

$$\Phi(z) = \Omega(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{-a}^a \frac{X(t)p(t)dt}{t-z} \quad (91)$$

其次, 若函数 $p(x)$ 近似为

$$p(x) = \sum_{n=0}^2 c_n U_n(x/a) \quad (92)$$

式中 $U_n(x/a)$ 为第 2 类 Chebyshev 多项式. 由此基本解出发, 裂纹间的交互作用便可定出. 基于此法, 多裂纹问题的某些解被得出 [44].

若裂纹表面力展开成下列级数

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x/a)^n \quad (93)$$

可得多裂纹问题的某些类同解答 [45,46].

若裂纹表面力展开成下列形式的级数

$$p(x) = \sum_{n=0}^N a_n P_n(x/a) \quad (94)$$

式中 $P_n(y)(y = x/a)$ 表示 Legendre 多项式. 由此, 可得多裂纹问题的某些类同解答 [46]. 数值解包括: (1) H 字母型裂纹在法向载荷作用下; (2) H 字母型裂纹在切向载荷作用下; (3) 二条平行裂纹在法向载荷作用下; (4) T 字母型裂纹的相关问题. 由上可见, 基于式 (92), (93) 或 (94) 构成的几个方法, 它们之间的差别是很小的.

6.5 基于裂纹表面作用力平均化的多裂纹问题解的简便方法

多裂纹问题解的简便方法曾被介绍 [47~49]. 此法依赖于迭加原理和各裂纹上作用力的平均化处理. 此法可用于任意位置的多裂纹问题.

取作用有法向载荷 p^∞ 又共线的二条裂纹作为例子来分析 (图 6). 显然, 原始问题 (o) 可以看成二个单裂纹问题, 即问题 (a) 和 (b) 的迭加. 在问题 (a) 和 (b) 中, 相应裂纹面上的载荷记为 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$. 二个的载荷 $p_1(x)$ 和 $p_2(x)$ 的平均值记为

$$p_{1,av} = \frac{1}{1-k} \int_{-1}^{-k} p_1(x)dx \quad (95)$$

$$p_{2,av} = \frac{1}{1-k} \int_k^1 p_2(x)dx$$

显然, 此时有 $p_1(-x) = p_2(x)$ 和 $p_{1,av} = p_{2,av}$. 这里假定, 第 1 条裂纹上的载荷对于第 2 条裂纹的影响用相应的载荷平均值来代替. 基于这一假设可得 [47~49]

$$p_2(x) = p^\infty + p_{1,av} \left[\frac{x + (1+k)/2}{\sqrt{(x+k)(x+1)}} - 1 \right] \quad (96)$$

若对于式 (96) 进行下列运算出

$$\int_k^1 [\dots]dx/(1-k)$$

可得

$$p_{1,av} = p_{2,av} = p^\infty/(1-\Lambda) \quad (97)$$

式中 $\Lambda = \frac{\sqrt{2(1+k)}}{1+\sqrt{k}} - 1$

从而, 函数 $p_2(x)$ 可以求出裂纹端应力强度因子.

把应力强度因子表示成 $K_1 = fp^\infty\sqrt{\pi(1-k)/2}$. 在 $k=0.01$ 时, 对比结果如下: (1) 对于内侧裂纹端 $f=2.372$ (由精确解) [18], $f=2.372$ (由式 (84)), $f=2.134$ (由式 (96)); (2) 对于外侧裂纹端 $f=1.184$ (由精确解), $f=1.184$ (由式 (84)), $f=1.175$ (由式 (96)). 由以上对比可见, 上述简便方法不能用于密集多裂纹情况.

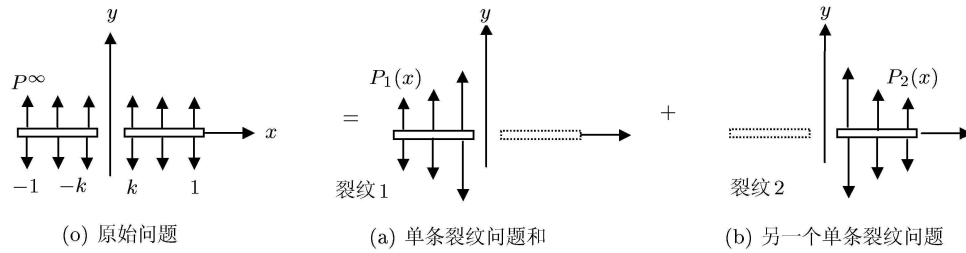


图 6 二条共线裂纹的迭加方法

在脆性材料中, 已经观察到微观裂纹在宏观裂纹端邻近得到发展. 一条裂纹和微裂纹的相互作用能显著地影响裂纹端应力强度因子的值. 这一课题用裂纹表面作用力平均化方法来解决. 如上所述, 这里的基本假定为, 把第 i 条裂纹上的法向载荷 $p_i(x)$ 的影响用相应的平均值 $p_{i,av}$ ($p_{i,av} = (1/2a_i) \int_{-a_i}^{a_i} p_i(x)dx$, a_i 为裂纹的半长) 来代替. 由于已经求出单裂纹常数载荷时的解, 相应的影响也可得到.

举例说, 在 N 条裂纹情况中, 取第 1 条裂纹上载荷的平均值后, 可得 [47,48]

$$\begin{aligned}
 p_{1,av} &= p_1^\infty + \Lambda_{21}^{nn} p_{2,av} + \Lambda_{21}^{n\tau} \tau_{2,av} + \dots + \\
 &\quad \Lambda_{N1}^{nn} p_{N,av} + \Lambda_{N1}^{n\tau} \tau_{N,av} \\
 \tau_{1,av} &= \tau_1^\infty + \Lambda_{21}^{n\tau} p_{2,av} + \Lambda_{21}^{\tau\tau} \tau_{2,av} + \dots + \\
 &\quad \Lambda_{N1}^{\tau\tau} p_{N,av} + \Lambda_{N1}^{\tau\tau} \tau_{N,av}
 \end{aligned} \quad (98)$$

式中 Λ 代表平均法向和切向载荷的影响系数. 例如, 系数 $\Lambda_{21}^{n\tau}$ 代表裂纹 L_2 上的平均法向应力在裂纹 L_1 上的平均切向应力的影响. p_1^∞ 和 τ_1^∞ 代表了远处作用的载荷. 在此假定下, 可得到多裂纹问题的解和应力强度因子. 不过, 此方法仅可用于远处作用载荷情况, 而不能用于裂纹表面任何载荷情况.

另一种近似方法曾被介绍 [50]. 在此法中, 多裂纹的位移和应力场均被近似地建立. 此时, 各裂纹的开口位移 (crack opening displacement discontinuity, COD) 表示成代表椭圆的函数和多项式的乘积. 例如, 对于在区间 $(-a, a)$ 的裂纹, 开口位移的法向分量表示成

$$\begin{aligned}
 v^+(x, 0) - v^-(x, 0) &= (a_0 + a_1(x/a) + \\
 &\quad a(x/a)^2) \sqrt{a^2 - x^2}, |x| \leq a
 \end{aligned} \quad (99)$$

基于此假定, 便可进行相应的计算. 容易看出, 此法等价于应用积分方程 (80), 在求积公式 (88) 中, 令 $M=3$.

不同于基于裂纹表面载荷平均化的 Kachnov 方法, 研究者提出修正 Kachanov 方法. 在该法中, 裂纹上的作用载荷分解成线性部分和余项 [51]. 此外, 在该法中又把余项略去. 相比之下, 修正 Kachanov 方法比不修正方法结果更精确.

6.6 积分变换 - 奇异积分方程方法

一些学者建立和发展了积分变换 - 奇异积分方程方法 [23,43]. 以反平面弹性中的一个裂纹问题来说明此方法. 在反平面弹性中, 纵向位移 $w(x, y)$ 应满足下列方程

$$\nabla^2 w(x, y) = 0, \text{ 式中 } e\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (100)$$

应力分量满足

$$\sigma_{zx} = G \frac{\partial w}{\partial x}, \sigma_{zy} = G \frac{\partial w}{\partial y}, G \text{ 为剪切弹性模量} \quad (101)$$

对于处在区间 $(-a, a)$ 上的裂纹, 可设立下列边界条件

$$\sigma_{zy}|_{y=0} = p(x), |x| < a \quad (102)$$

式中 $p(x)$ 代表给定的载荷.

在求解时, 可提出下列边界值问题

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{\delta(x-t)}{G}, t > 0 \quad (103)$$

式中 $\delta(x-t)$ 表示 Dirac 函数. 现在令

$$w = w_1 + w_2, \text{ 其中 } \nabla^2 w_1 = 0, \nabla^2 w_2 = 0 \quad (104)$$

设立二个边界值问题如下

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{\delta(x-t) + \delta(x+t)}{2G} \quad (105)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{\delta(x-t) - \delta(x+t)}{2G} \quad (106)$$

若利用余弦和正弦 Fourier 变换, 可得

$$\sigma_{zy} \Big|_{y=0} = G \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \frac{1}{\pi(t-x)} \quad (107)$$

事实上, 式 (107) 意味着在点 t 处的单位点位错在点 x 处引起的力的影响正比于 $1/(\pi(t-x))$. 若在区间分 $(-a, a)$ 上设立分布位错密度 $g(t)$, 可得下列奇异积分方程

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g(t)dt}{t-x} = p(x), |x| < a \quad (108)$$

与此同时, 由位移单值条件, 可导出下列方程

$$\int_{-a}^a g(t)dt = 0 \quad (109)$$

利用此法, 可解决共线多裂纹问题和平行多裂纹问题. 不过, 此法不能用于倾斜多裂纹情况. 在更复杂情况中, 例如在板条的裂纹问题中, 相关奇异积分方程取下列形式

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{g(t)dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a K(t, x)g(t)dt = p(x), |x| < a \quad (110)$$

式中 $K(t, x)$ 为正常的积分核. 一般而言, 此核 $K(t, x)$ 要用一个积分来表示, 它必须通过数值积分得到. 考虑到这点, 基于复位函数的奇异积分方程方法则更为有效. 在这方面, Erdogan 及其合作者作了不少研究 [52~72].

6.7 Fourier 积分变换 - 对偶积分方程方法

Fourier 积分变换 - 对偶奇异积分方程方法是 Sneddon 及其它一些作者建立和发展的. 今用平面弹性的一个裂纹问题来说明此方法. 对于在区间 $(-a, a)$ 上的裂纹, 可提出下列边界值问题 [4, 17, 73~75]

$$\sigma_y(x, 0) = -p(x), 0 \leq x \leq a \quad (111)$$

其中 $p(x) = p(-x)$

$$v(x, 0) = 0, x > a \quad (112)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = 0, x \geq 0 \quad (113)$$

现定义函数 $f(\xi, x)$ 的余弦和正弦 Fourier 变换如下

$$F_c[f(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty f(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi \quad (114)$$

$$F_s[f(\xi, y); \xi \rightarrow x] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^\infty f(\xi, y) \sin(\xi x) d\xi \quad (115)$$

利用 Fourier 变换, 可得一个弹性力学解如下

$$u(x, y) = -(\sqrt{2/\pi} E(1+\nu)) \times F_s[(1-2\nu-\xi y)\psi(\xi)e^{-\xi y}; \xi \rightarrow x] \quad (116)$$

$$v(x, y) = (\sqrt{2/\pi} E(1+\nu)) \times$$

$$F_c[(2-2\nu+\xi y)\psi(\xi)e^{-\xi y}; \xi \rightarrow x] \quad (117)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -\sqrt{2/\pi} \frac{d}{dx} F_s[(\psi(\xi); \xi \rightarrow x] \quad (118)$$

式中 E 为弹性模量, ν 为 Poisson 比. 上述解恒满足条件式 (113). 由式 (111), (112), (117) 和 (118) 可得下列对偶积分方程

$$\sqrt{2/\pi} \frac{d}{dx} F_s[(\psi(\xi); \xi \rightarrow x] = p(x), 0 \leq x \leq a \quad (119)$$

$$F_c[(\psi(\xi); \xi \rightarrow x] = 0, x > a \quad (120)$$

此外, 函数 $\psi(\xi)$ 可通过函数 $h(t)$ 来求表示, 如下式所示

$$\psi(\xi) = \int_0^a th(t)J_0(\xi t)dt \quad (121)$$

式中 J_0 表示零阶第 1 类 Bessel 亚函数可以证明, 式 (121) 所示的函数 $\psi(\xi)$ 恒满足式 (120). 将式 (121) 代入到式 (119) 中, 即得 Abel 型积分方程

$$\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{th(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}} = p(x), 0 < x < a \quad (122)$$

由式 (122), 可得下列解

$$h(t) = \int_0^t \frac{p(x)dx}{\sqrt{t^2-x^2}}, 0 < t < a \quad (123)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^a \frac{th(t)dt}{\sqrt{x^2-t^2}}, x > a \quad (124)$$

最后, 可得裂纹端应力强度因子值

$$K_1 = \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(x-a)}\sigma_y(x, 0) = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \frac{p(t)dt}{\sqrt{a^2-t^2}} \quad (125)$$

由以上推导可见, 此法很难用于倾斜裂纹情况. 其次, 上述推导局限于在 $(-a, a)$ 上载荷为偶函数的情况, 即 $p(x) = p(-x)$. 对于载荷为奇函数的情况, 即 $p(x) = -p(-x)$ 时, 相关解答可参见文 [76].

6.8 多裂纹解的某些应用

许多学者研究了各向同性物体内宏观裂纹和微观裂纹间的相互作用 [14, 77~79]. 有关解答可从以上介绍的方法中得到. 当多条微观裂纹处在主

裂纹端的邻近时, 有关解答是难以描述的. 一般而言, 微裂纹处于杂乱随机状态. 这一情况会造成分析中的不确定性. 例如, 有些情况下微观裂纹会使宏观裂纹应力强度因子值增加, 有时则减小. 事实上, 宏观裂纹应力强度因子值的增加或减小取决于多种因素, 它们是: (1) 开裂物体的载荷情况; (2) 宏观裂纹和微观裂纹间的相互位置.

Chudnovsky 等 [77,78] 研究了一条主裂纹和二条微观裂纹间的相互作用并研究了各向同性物体内宏观裂纹和微观裂纹间的相互作用其中, 宏观裂纹是一条半无限长裂纹又微观裂纹处在宏观裂纹端的邻近. 用基于位错密度分布的奇异积分方程方法求解此问题. Wang 等 [79] 对于裂纹端应力强度因子的增大和屏蔽效应, 作了详细研究.

主裂纹 (通过半无限长裂纹表示) 和微观裂纹间的弹性相互作用 (通过应力强度因子表示) 得到了研究 [80,81]. 问题归结为以位错密度为未知函数的奇异积分方程. 通过下列变换

$$t = (u - 1)/(u + 1)$$

可把区间 $(-\infty < t < 0)$ 上定义的奇异积分方程转化为区间 $(-1 < u < 1)$ 上定义的奇异积分方程. 随着微观裂纹位置的变化, 主裂纹端应力强度因子的变化情况得到了研究.

利用一个简便方法, 主裂纹和几条微观裂纹间的弹性相互作用得到了研究 [82]. 分析表明, 宏观裂纹应力强度因子值的增加或减小取决于多种因素. 此简便方法也用于无数微观裂纹间的弹性相互作用的研究 [83]. 此法主要依赖于 Kachanov 的裂纹作用载荷平均化的假定.

在黏合半平面的界面裂纹问题中, Zhao 等 [86] 研究了微观裂纹对于界面主裂纹 J 积分的贡献. 利用多裂纹问题的 Fredholm 积分方程方法, 一些论文研究了断裂分析中的路径无关积分. 例如已经证明, M 积分的结果和总体坐标系的选择无关 [85~87].

与此同时, 进一步研究表明, 对 M 积分有下列结果 [88]

$$M_*(CR) = M(CR) + M_a \quad (126)$$

$$\begin{aligned} M_a = & \frac{1}{8G} \{ [(\kappa + 1)\sigma_x^\infty + (\kappa - 3)\sigma_y^\infty] F_x x_d + \\ & [(\kappa + 1) \cdot \sigma_y^\infty + (\kappa - 3)\sigma_x^\infty] F_y y_d + \\ & 4\sigma_{xy}^\infty (F_y x_d + F_x y_d) \} \end{aligned} \quad (127)$$

式中 $M_*(CR)$, $(M(CR))$ 是在坐标系 $(o_*x_*y_*)$, (oxy) 中又在足够大圆上的 M 积分值. 此外, 二坐标系之间有关系式 $x_* = x + x_d$, $y_* = y + y_d$, σ_x^∞ , σ_y^∞ 和 σ_{xy}^∞ 为远处作用载荷, F_x 和 F_y 为有限区域上作用的合力. 由式 (126) 和 (127) 可见, 仅当合力为零时, 即 $F_x = F_y = 0$, M 积分和坐标平移无关.

用一个自洽方法来估价开裂物体的有效弹性模量 [89]. 考虑到裂纹对于开裂物体的柔度影响, 可得到有效弹性模量 [82]. 在此法中, 应该定义一个开口位移张量 $\mathbf{B}$, 它表示了作用力引起的开口位移. 此法适用于疏松裂纹分布情况.

对于非桥联裂纹和桥联裂纹情况下的双排周期裂纹, 作了裂纹交互影响的渐近分析 [90,91]. 在桥联裂纹中, 有下列关系式存在

$$p(x) = kv(x)$$

式中 $p(x)$ 为裂纹表面载荷, $v(x)$ 为开口位移, k 为一常数. 利用无限条共线裂纹的闭合形式解, 得到了一个以裂纹表面载荷为未知函数的 Fredholm 积分方程. 从而, 可得开裂物体的有效弹性模量. 与先前的数值解对比可知, 闭合形式解可给出精确的结果.

7 多裂纹问题第 2 类奇异积分方程及其正则化

介绍多裂纹问题第 2 类奇异积分方程如下. 此外, 讨论此方程的正则化问题. 并综述了相关求解方法.

7.1 奇异积分方程

为了说明第 2 类奇异积分方程的构成, 有必要分析单裂纹问题 (图 4). 若代表开口位移的函数 $g(t)$ 沿着区间 $(-a, a)$ 设立, 相应的复位函数为下式所示 [14,92]

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{g(t) dt}{t - z} \\ \psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\overline{g(t)} dt}{t - z} + \\ & \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{g(t) dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{tg(t) dt}{(t - z)^2} \end{aligned} \quad (128)$$

其中开口位移定义如下

$$\begin{aligned} g(t) = & -\frac{2Gi}{\kappa + 1} [(u(t) + iv(t))^+ - \\ & (u(t) + iv(t))^-], |t| < a \end{aligned} \quad (129)$$

由表示基本解的式 (40) 和 (41) 可得上述复位函数. 由式 (26) 易得到由复位函数引起的在其它位置处作用的合力函数 (或 $-Y+iX$) 影响. 不过, 在推导本处的影响时, 要利用到式 (11), (12) 和 (13).

在建立多裂纹问题第二类奇异积分方程时 (图 5), 应使用下列步骤: (1) 令开口位移函数 $g_k(t) (k=1, 2, \dots, N)$ 设立在各裂纹位置处; (2) 求出第 k 条裂纹上设立的开口位移函数 $g_k(t)$ 在本身上的合力 (或 $-Y+iX$) 影响; (3) 求出各条裂纹上设立的开口位移函数 $g_j(t) (j=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N)$ 在第 k 条裂纹上的合力 (或 $-Y+iX$) 影响.

采取上述各步后, 可得下列奇异积分方程

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-a_k}^{a_k} \frac{g_k(t) dt}{t-s_k} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{-a_j}^{a_j} [g_j(s_j) M_{jk}(s_j, s_k) + \\ \overline{g_j(s_j)} N_{jk}(s_j, s_k)] ds_j = (-Y_{k*} + iX_{k*}) \cdot \\ \exp(-i\alpha_k) + c_k \\ |s_k| < a_k, k=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (130)$$

式中 $M_{jk}(s_j, s_k)$ 和 $N_{jk}(s_j, s_k)$ 为二个正常的函数, 详见文 [14], 又 $(-Y_{k*} + iX_{k*})$ 代表作用在第 k 条裂纹上的合力函数. 奇异积分方程 (130) 称为 S2 型. 此方程的特点为右端项含有常数 c_k .

7.2 正则化方法

为了奇异积分方程 (130) 的正则化, 只要对方程 (130) 施加下列运算

$$\int_{-a_k}^{a_k} [\dots] (a_k^2 - s_k^2)^{-1/2} \frac{ds_k}{s_k - r_k} \quad (131)$$

此外, 只要采用下列步骤: (1) 利用 Poincare-Bertrand 公式; (2) 利用式 (11), (12) 和 (13), 可得下列 Fredholm 积分方程 [14, 92]

$$\begin{aligned} H_k(s_k) + \sum_{j=1}^N \int_{-a_j}^{a_j} [H_j(s_j) \tilde{M}_{jk}(s_j, s_k) + \\ \overline{H_j(s_j)} \tilde{N}_{jk}(s_j, s_k)] ds_j = \\ -\frac{i}{\pi} \int_{-a_k}^{a_k} \frac{[-Y_{k*}(t) + iX_{k*}(t)] \exp(-i\alpha_k)}{X_k(t)(t-s_k)} dt \\ |s_k| < a_k, k=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (132)$$

式中

$$H_k(t) = (a_k^2 - t^2)^{-1/2} g_k(t), |t| < a_k, k=1, 2, \dots, N \quad (133)$$

其中, 二个积分核 $\tilde{M}_{jk}(s_j, s_k)$ 和 $\tilde{N}_{jk}(s_j, s_k)$ 均为正常函数 [14]. 积分方程 (130) 也可以从式 (130) 所示的 Cauchy 积分反演得到.

式 (132) 所示的 Fredholm 积分方程称为 R2 型. 此方程的特点为: (1) 式 (132) 的右端项为奇异积分; (2) 右端项不包含常数项.

7.3 某些相关研究

Denda 等 [94] 曾把复变函数用于多裂纹问题的边界元方法中. 用连续分布的位错密度来模拟开口位移. 此外, 该研究中还介绍了下列积分式

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} U_{m-1}(t) dt}{t-z} = T^{(m)}(z), m \geq 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_m(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-z)} = U^{(m-1)}(z), m \geq 0 \end{aligned} \quad (134)$$

式中 $z = x + iy$ 为复变量

$$\begin{aligned} T^{(m)}(z) = (z - \sqrt{z^2 - 1})^m \\ U^{(m-1)}(z) = -\frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^m}{\sqrt{z^2 - 1}} \end{aligned} \quad (135)$$

在式 (134) 中, $T_m(t)$ 和 $U_{m-1}(t)$ 称为第 1 类和第 2 类 Chebyshev 多项式. 该文中, 把开口位移 $g(t)$ 表示为

$$g(t) = \sum_{m=1}^M c_m \sqrt{1-t^2} U_{m-1}(t) \quad (136)$$

此时, 只要应用式 (134) 和 (135), 复位函数可以闭合形式积出. 从而, 边界元方法可以建立起来.

Denda 等 [95] 曾介绍过椭圆孔口边界元方法的一个特殊 Green 函数. 介绍的边界元由带椭圆孔口无限域的奇异解构成. 当存在有以 a 和 $c (c \geq a)$ (各在 x 和 y 方向) 的半轴长的椭圆孔时, 假设集中力 f (或点位错 b), 作用点 $z = t$ 处. 利用 Muskhelishvili 复变函数方法, 把 Green 函数表示成

$$\phi_{\text{total}}(z) = \phi_s(z) + \phi(z), \psi_{\text{total}}(z) = \psi_s(z) + \psi(z) \quad (137)$$

式中 $\phi_s(z)$ 和 $\psi_s(z)$ 为无限制物体中以 $z = t$ 为奇点时的奇异部分. 再者, $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 为正常部分, 它由椭圆孔口自由条件来决定. 一旦奇异部分被给定, 正常部分即可决定 [95, 96]. 正因为此时孔口自由条件已得到自动满足, 此时椭圆孔口边界上已不必用边界元来模拟.

基于沿裂纹连续分布的开口位移函数, 曾介绍过一种边界元方法 [97]. 若裂纹位于区间 $(-a, a)$ 上, 在左裂纹端处, 把开口位移函数 $g(t)$ 表示成

$g(x) = c\sqrt{a+x}$. 其次, 使用了常规方法. 可以看出, 作者对于 Fredholm 积分方程方法的评论是不正确的. 事实上, 5 种类型的积分方程 (即 S1, R1A, R1B, R2, HS 型) 可求解任意几何条件下的多裂纹问题^[14].

Helsing^[98] 曾给出数以万计随机方向分布裂纹问题的数值解. 其中, 问题是建立在 Muskhelishvili 建议的复位函数的基础上^[99]. 此时, 弹性力学偏微分方程可转化为第 2 类 Fredholm 积分方程, 并研究了开裂物体的有效弹性模量问题.

8 多裂纹问题的超奇异积分方程

现介绍多裂纹问题的超奇异积分方程如下.

8.1 多裂纹问题的超奇异积分方程的推导

超奇异积分的定义可见文 [13,14,100~109]. 若以区间 $(-a, a)$ 上的积分为例, 介绍超奇异积分的 2 种定义如下

$$H(s) = v.f. \int_{-a}^a \frac{g(t)dt}{(t-s)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a}^{s-\varepsilon} \frac{g(t)dt}{(t-s)^2} + \int_{s+\varepsilon}^a \frac{g(t)dt}{(t-s)^2} - \frac{2g(s)}{\varepsilon} \right\}, |s| < a \quad (138)$$

$$H(s) = v.f. \int_{-a}^a \frac{g(t)dt}{(t-s)^2} = \frac{d}{ds} \int_{-a}^a \frac{g(t)dt}{t-s}, |s| < a \quad (139)$$

第 1 种定义由式 (138) 所示, 此式表明, 积分只取积分的有限值部分. 从而, 超奇异积分常被称为有限部积分. 第 2 种定义由式 (139) 所示, 此式表明, 超奇异积分可看成 Cauchy 奇异积分对参量的导函数. 式 (139) 意味着, 微分 (ds) 可以进入积分记号只要把得到的结果 (式 (139) 的左端项) 看成有限部积分.

若对式 (130) 作下列运算 $d[\dots]/ds_k$, 便得到下列多裂纹问题的超奇异积分方程

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-a_k}^{a_k} \frac{g_k(t)dt}{(t-s_k)^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{-a_j}^{a_j} [g_j(s_j)M_{jk}^*(s_j, s_k) + \\ & \quad \overline{g_j(s_j)}N_{jk}^*(s_j, s_k)] ds_j = p_k(s_k) - iq_k(s_k) \\ & |s_k| < a_k, k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (140)$$

式中 $M_{jk}^*(s_j, s_k)$ 和 $N_{jk}^*(s_j, s_k)$ 二个正常函数, 可参见文 [14]. 事实上, 诸函数 $g(s_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) 表示开口位移, 又 $p_k(s_k) - iq_k(s_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) 代表裂纹表面的作用载荷. 由裂纹端的一般分析可

知, 开口位移函数可表示为

$$g(s_k) = G_k(s) \sqrt{a_k^2 - s^2} \quad (141)$$

一旦超奇异积分方程得了数值解, 裂纹端的应力强度因子可由算出的开口位移函数得到.

8.2 超奇异积分的求积公式

现介绍一个超奇异积分的求积公式如下^[14,101,102,109]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} v.f. \int_{-a}^a \frac{g(t)dt}{(t-t_0)^2} = \frac{1}{\pi} v.f. \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} G(t)dt}{(t-t_0)^2} = \\ & \sum_{k=1}^{M+1} W_k(t_0) G(t_k), |t_0| \leq a \end{aligned} \quad (142)$$

式中

$$\begin{aligned} W_k(t_0) = & -\frac{2}{M+2} \sum_{m=0}^M (m+1) \sin \left(\frac{k\pi}{M+2} \right) \times \\ & \sin \left(\frac{(m+1)k\pi}{M+2} \right) U_m(t_0/a), k = 1, 2, \dots, M+1 \end{aligned} \quad (143)$$

$$t_k = a \cos \left(\frac{k\pi}{M+2} \right), k = 1, 2, \dots, M+1 \quad (144)$$

式中 $U_m(t_0/a)$ 表示第 2 类 Chebyshev 多项式. 值得注意, 此式对于任意的点 t_0 均有效^[14].

此外, 介绍一个特殊的超奇异积分如下^[14,101,102,109,110]

$$\begin{aligned} & v.f. \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} U_m(t/a)dt}{(t-t_0)^2} = \\ & -\pi(m+1)U_m(t_0/a), |t_0| < a \end{aligned} \quad (145)$$

基于这些求积公式, 得到了许多多裂纹问题的解^[14].

8.3 平面弹性力学裂纹问题积分方程的分类

在平面弹性力学裂纹问题中, 包括曲线裂纹和多裂纹问题, 积分方程可表示为^[14]

$$\int_L K(t, t_0) f(t) dt = p(t_0), (\text{或 } p(t_0) + c, t_0 \in L) \quad (146)$$

式中 $f(t)$ 为未知函数, $K(t, t_0)$ 为积分核, $p(t_0)$ 为方程中的右端项. 在式 (145) 中, L 代表曲线裂纹或一族多裂纹. 由于位移在 L 上的间断性, 在式 (75) 和 (130) 中, 人们可取开口位移或位错密度作为未知函数. 与此同时, 对于积分方程的右端项的选择, 有二种可能性. 第 1 种情况中, 选取载荷为右端项. 第 2 种情况中, 选取合力函数载荷为右端项, 在后一情况, 右端项常含有一个常数 c . 显

然, 积分核 $K(t, t_0)$ 将决定于二函数 $f(t)$ 和 $p(t_0)$ 的具体选用. 二函数 $f(t)$ 和 $p(t_0)$ 的各种选用见表 1.

对于对数核型 (WS 型) 的弱奇异积分方程, 尚未见到有关多裂纹问题的工作. 与此同时, 关于 S1, R1A, R1B, S2, R2 和 HS 型积分方程在多裂纹问题中的应用, 可见第 6, 第 7 和第 8 节. 不过, Fourier 变换 - 对偶积分方程方法无法在表 1 中分类.

表 1 平面弹性力学裂纹问题积分方程的分类

类型	$f(t)$	$p(t_0)$	$K(t, t_0)$ 的性质
WS	位错密度	合力	弱奇异 (对数型)
S1	位错密度	分布载荷	奇异
S2	开口位移	合力	奇异
HS	开口位移	分布载荷	超奇异
R1A	位错密度		正常 (由 S1 反演)
R1B	分布载荷	分布载荷	正常
R2	开口位移		正常 (由 S2 反演)

8.4 相关课题

近来, 下列类型的超奇异积分得到研究^[111]

$$I_\alpha(T_n, m, r) = \int_{-1}^1 \frac{T_n(s)(1-s^2)^{m-1/2}}{(s-r)^\alpha} ds, |r| < 1$$

$$I_\alpha(U_n, m, r) = \int_{-1}^1 \frac{U_n(s)(1-s^2)^{m-1/2}}{(s-r)^\alpha} ds, |r| < 1 \quad (147)$$

式中 α 为正实数, m 为整数 ($m \geq 0$), $T_n(s)$ 和 $U_n(s)$ 为第 1 类和第 2 类 Chebyshev 多项式. 对于 $\alpha=1, 2, 3, 4$ 和 $m=0, 1, 2, 3$, 给出了精确的求积结果^[111].

当半平面周期裂纹承受任意载荷时, 相关问题得到了分析研究^[112]. 直接从裂纹表面的位移出发, 混合边值问题导致一个超奇异积分方程, 在其中裂纹开口位移是未知函数. 此问题归结为下列超奇异积分方程

$$\text{v.f.} \int_{-1}^1 \frac{V(s)ds}{(s-r)^2} + \int_{-1}^1 L(s, r)v(s)ds = p(r), |r| < 1 \quad (148)$$

式中 $L(s, r)$ 为正常积分核.

利用超奇异积分方程方法, 许多曲线裂纹问题得到解决^[113~119]. 特别是弧长坐标方法的应用, 对曲线裂纹问题的求解给出一个有效的途径, 在此法中, 把曲线形状映像到实轴上^[117].

对于孔口外的裂纹问题, 曾介绍一种超奇异积分方程方法^[120, 121]. 在孔口表面为自由假定下, 引进了一个基本解. 这个基本解定义为, 有一集中力作用在圆形孔的外域. 利用 Somigliana 位移恒等式后, 可得区域内各点的应力和位移. 若分析的周界退化为一裂纹时, 便可导出超奇异积分方程. 此法是一般性的, 它也可以用于自由半平面带曲线裂纹的情况中. 此法的突出优点为, 在运用超奇异积分方程时, 可避免位移单值条件^[120, 121].

为了分析有限物体的多裂纹问题, 一个有效的二重边界元法得到了研究^[122]. 如果采用裂纹开口位移为未知函数, 若裂纹表面载荷是事先给定的, 一定会得到带有超奇异性核 ($O(1/r^2)$) 的积分方程. 这个情况与直线裂纹时的情况相同.

基于间接边界元法, Ammons 等^[123]介绍一种求解方法. 此时, 裂纹用位移间断值及相关基本解来模拟, 一个分岔裂纹问题得到解决.

Wang 等^[124, 125]研究了带多孔和多裂纹的无限平板问题. 问题的解答是基于复位函数, 它们是由于沿裂纹和孔周界的分布密度引起的. 这样, 构成了一个奇异积分方程. 在力边界条件情况下, 未知函数是沿裂纹的分布位错和沿孔口的位移的导函数.

Cheeseman 等^[126]研究了曲线裂纹和弹性核的相互作用. 曲线裂纹用未知位错密度来模拟, 得到了奇异积分方程.

Pan 等^[127]曾介绍一种二维线弹性断裂力学的边界单元方法. 由于在非裂纹位置处设立了位移或分布力未知函数, 又在裂纹表面处设立了开口位移未知函数, 此法兼有常用边界元方法及开口位移法的优点.

对于多圆孔问题, 把此问题归结为一个超奇异积分方程的解, 其中以孔口处位移为未知函数^[128]. 在此法中, 未知位移表示为 Fourier 级数, 并导出了相关系数的代数方程组. 曾提出一种超奇异积分方程, 并用摄动法解决微小曲率的曲线裂纹问题^[110].

9 多半无限长裂纹的 Fredholm 积分方程

为了建立弹性平面中多条多半无限长裂纹问题, 必须研究单条多半无限长裂纹时的解^[14, 129]. 此时,

半无限长裂纹问题的边界条件如下

$$(\sigma_y - i\sigma_{xy})^+ = (\sigma_y - i\sigma_{xy})^- = P(t) - iQ(t), t > 0 \quad (149)$$

对此半无限长裂纹问题, 不难证明有下列解^[14]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z}} \int_0^\infty \frac{(P(t) - iQ(t)) \sqrt{t} dt}{t - z}, t > 0 \quad (150)$$

$$\Psi(z) = B(z) - z\Phi'(z) - \Phi(z)$$

$$B(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z}} \int_0^\infty \frac{(P(t) + iQ(t)) \sqrt{t} dt}{t - z}, t > 0 \quad (151)$$

式中 $\sqrt{z}$ 取下式定义的分支

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= \sqrt{t}, \text{ 若 } z = t^+, t > 0 \\ \sqrt{z} &= -\sqrt{t}, \text{ 若 } z = t^-, t > 0 \end{aligned} \quad (152)$$

分析表明, 若在区间 $(0 < t < b)$ 上作用载荷 $(\sigma_y - i\sigma_{xy})^+ = (\sigma_y - i\sigma_{xy})^- = -p$, 相应的应力强度因子为 $K_1 = 0.9003p\sqrt{\pi b}$. 类似于第 6 节中的 R1B 型积分方程, 对于多半无限长裂纹, 也曾介绍过类似的 Fredholm 积分方程^[14].

10 多裂纹问题的一般情况

若裂纹表面载荷为任意时, 一般地说它们不构成平衡力系, 此时便成为多裂纹问题的一般情况^[130]. 在局部坐标中, 第 k 条裂纹上的边界条件如下

$$\begin{aligned} (\sigma_y - i\sigma_{xy})_k^+ &= [p_k(s_k) - iq_k(s_k)] + \\ &[R_k(s_k) - iW_k(s_k)], |s_k| < a_k, k = 1, 2, \dots, N \\ (\sigma_y - i\sigma_{xy})_k^- &= [p_k(s_k) - iq_k(s_k)] - \\ &[R_k(s_k) - iW_k(s_k)], |s_k| < a_k, k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (153)$$

式中上标 + (或 -) 代表裂纹面的上下侧. 在式 (153) 中, $[p_k(s_k) - iq_k(s_k)]$ 表示大小相同方向相反的载荷, 而 $[R_k(s_k) - iW_k(s_k)]$ 表示大小相同方向相同的载荷.

类似地, 为了建立相应的积分方程, 必须研究相关的单裂纹问题. 设此单裂纹位在实轴区间

$(-a, a)$ 上 (图 4(a)), 又可设边界条件如下

$$\begin{aligned} (\sigma_y - i\sigma_{xy})^+ &= [P(s) - iQ(s)] + [R(s) - iW(s)] \\ |s| &< a \\ (\sigma_y - i\sigma_{xy})^- &= [P(s) - iQ(s)] - [R(s) - iW(s)] \\ |s| &< a \end{aligned} \quad (154)$$

在此问题中, 二个复位函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 应作下列分解

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z) \\ \Omega(z) &= \Omega_1(z) + \Omega_2(z) \\ \Psi_1(z) &= \bar{\Omega}_1(z) - z\Phi_1'(z) - \Phi_1(z) \\ \Psi_2(z) &= \bar{\Omega}_2(z) - z\Phi_2'(z) - \Phi_2(z) \end{aligned} \quad (155)$$

由边界条件, 可构成一个 Riemann-Hilbert 问题, 得到解如下^[2]

$$\frac{\Phi_1(z)}{\Omega_1(z)} = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{-a}^a \frac{(P(t) - iQ(t)) X(t) dt}{t - z} \quad (156)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_2(z)}{\Omega_2(z)} &= \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{-a}^a (R(t) - iW(t)) dt \pm \\ &\frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{(R(t) - iW(t)) dt}{t - z} \end{aligned} \quad (157)$$

类似地, 多裂纹问题可以看成若干单裂纹问题的迭加. 对于第 k 条裂纹上, 可假定有下列载荷作用

$$\begin{aligned} (\sigma_y - i\sigma_{xy})_k^+ &= [P_k(s_k) - iQ_k(s_k)] + [R_k(s_k) - \\ &iW_k(s_k)], |s_k| < a_k, k = 1, 2, \dots, N \\ (\sigma_y - i\sigma_{xy})_k^- &= [P_k(s_k) - iQ_k(s_k)] - [R_k(s_k) - \\ &iW_k(s_k)], |s_k| < a_k, k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (158)$$

利用叠加原理, 以及由式 (154) 至 (157) 所示单裂纹问题的解, 可得下列 Fredholm 积分方程

$$\begin{aligned} P_k(s_k) - iQ_k(s_k) &+ \sum_{j=1}^N \int_{-a_j}^{a_j} [P_j(s_j) - iQ_j(s_j)] \cdot \\ &C_{jk} \times (s_j, s_k) ds_j + \sum_{j=1}^N \int_{-a_j}^{a_j} [P_j(s_j) + iQ_j(s_j)] \cdot \\ &D_{jk} \times (s_j, s_k) ds_j = p_k(s_k) - iq_k(s_k) - [p_k^*(s_k) - \\ &iq_k^*(s_k)], |s_k| < a_k, k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (159)$$

其中右端项中的函数 $[p_k^*(s_k) - iq_k^*(s_k)]$, $k = 1, 2, \dots, N$ 由下式定义

$$\begin{aligned} p_k^*(s_k) - iq_k^*(s_k) = & \sum_{j=1}^N \int_{-a_j}^{a_j} [R_j(s_j) - iW_j(s_j)] \cdot \\ & C_{jk}^*(s_j, s_k) ds_j + \sum_{j=1}^N \int_{-a_j}^{a_j} [R_j(s_j) + iW_j(s_j)] \cdot \\ & D_{jk}^*(s_j, s_k) ds_j, |s_k| < a_k, k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (160)$$

各积分核 $C_{jk}(s_j, s_k)$, $D_{jk}(s_j, s_k)$, $C_{jk}^*(s_j, s_k)$ 和 $D_{jk}^*(s_j, s_k)$ 的定义可参见文 [14]. 显然, 一旦积分方程解出后, 应力强度因子值即可求出. 此问题的特点如下: (1) 只有载荷 $P_k(s_k) - iQ_k(s_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) 是积分方程中的未知函数; (2) 应力强度因子值依赖于弹性常数 κ ; (3) 裂纹端邻近存在着应力的对数型奇异性 [14].

11 修正复位函数和黏合半平面中的多裂纹问题

修正复位函数 (the modified complex potential, MCP) 这个概念在黏合半平面中的多裂纹问题中起着重要作用 (图 7). 只有当修正复位函数导出后, 相应的多裂纹问题才可以建立 [14, 131].

11.1 黏合半平面情况下的修正复位函数

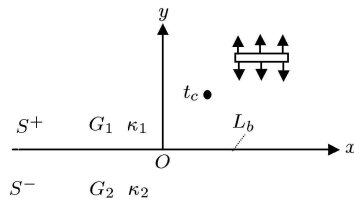
修正复位函数是从原始复位函数 (the original

complex potential, OCP) 导出来的, 而原始复位函数是预知的 [12, 14, 131]. 原始复位函数代表一个在弹性全平面上定义的特解, 例如, 可能此解在上半平面有一个奇点 (图 7(a)). 其中的奇异部分可能是下列各种情况所构成, 即 (1) 上半平面的点位错; (2) 上半平面的力偶极子; (3) 在上半平面中一条受载荷的单裂纹. 现在假定原始复位函数取下列形式

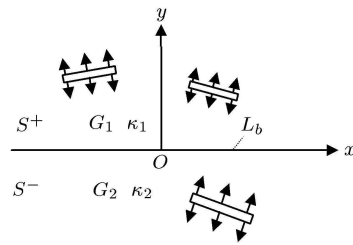
$$\begin{aligned} \phi_p(z) = & A \log(z - t_c) + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{(z - t_c)^n}, t_c \in S^+ \\ \psi_p(z) = & B \log(z - t_c) + \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{(z - t_c)^n}, t_c \in S^+ \end{aligned} \quad (161)$$

式中 S^+ 表示上半平面, $z = t_c$ 代表 S^+ 上一点 (图 7(a)), A, B, a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots, N$) 为某些常数. 值得注意, 原始复位函数是在整个全平面上定义的 (图 7(a)). 假设有一个黏合半平面, 且对于上半平面 (或下半平面) 相应的弹性常数记成 G_1, κ_1 (或 G_2, κ_2).

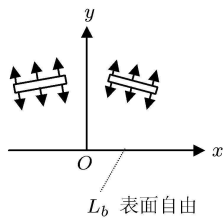
修正复位函数定义在黏合半平面上, 定义时的条件如下: (1) 原始复位函数和修正复位函数在上半平面 (S^+) 有相同的奇异部分; (2) 定义在上半平面 (S^+) 的和定义在下半平面 (S^-) 的修正复位函数满足实轴上的位移和力连续条件 (图 7(b)).



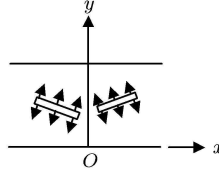
(a) 在上半平面上作用的一般载荷



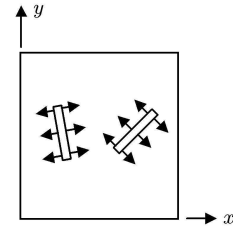
(b) 黏合半平面中的多裂纹问题



(c) 带自由边界的上半平面中的多裂纹问题



(d) 带形区域中的多裂纹问题



(e) 有限区域中的多裂纹问题

图 7 黏合半平面, 带形域和有限域上定义的各种边界条件

若令修正复位函数取下列形式

$$\phi_1(z) = \phi_p(z) + \phi_c(z) \quad (162)$$

$$\psi_1(z) = \psi_p(z) + \psi_c(z), z \in S^+ + L_b$$

$$\phi_2(z) \text{ 和 } \psi_2(z), z \in S^- + L_b \quad (163)$$

利用式 (26) 和 (27), 位移和作用力沿着界面的连续条件可表示为

$$\begin{aligned} (\overline{\phi_1(t)} + t\phi'_1(t) + \psi_1(t))^+ &= (\overline{\phi_2(t)} + \\ t\phi'_2(t) + \psi_2(t))^- , t \in L_b \end{aligned} \quad (164)$$

$$\begin{aligned} G_2(\kappa_1 \overline{\phi_1(t)} - t\phi'_1(t) - \psi_1(t))^+ &= \\ G_1(\kappa_2 \overline{\phi_2(t)} - t\phi'_2(t) - \psi_2(t))^- , t \in L_b \end{aligned} \quad (165)$$

式中 L_b 表示实轴 (图 7(b)). 利用这二个条件, 可得到

$$\phi_c(z) = \delta_1(z \bar{\phi}'_p(z) + \bar{\psi}_p(z)) \quad (166)$$

$$\psi_c(z) = \delta_2 \bar{\phi}_p(z) - z \phi'_c(z), z \in S^+ + L_b$$

$$\phi_2(z) = (1 + \delta_2)\phi_p(z)$$

$$\psi_2(z) = (1 + \delta_1)\psi_p(z) + (\delta_1 - \delta_2)z\phi'_p(z) \quad (167)$$

$$z \in S^- + L_b$$

式中

$$\delta_1 = \frac{G_2 - G_1}{G_1 + \kappa_1 G_2}, \delta_2 = \frac{\kappa_1 G_2 - \kappa_2 G_1}{G_2 + \kappa_2 G_1} \quad (168)$$

从原始修正复位函数修到正复位函数这一过程等同于复位函数的变形或修正过程. 易证明当 $G_1 = G_2, \kappa_1 = \kappa_2$ 时, 就有 $\delta_1 = \delta_2 = 0, \phi_1(z) = \phi_p(z), \psi_1(z) = \psi_p(z), \phi_2(z) = \phi_p(z)$.

11.2 黏合半平面情况下的多裂纹问题

Chen 等^[131] 介绍过一种黏合半平面情况下的多裂纹问题的解法, 此法类似于第 6.2 节介绍的方法. 在此法中, 多裂纹被看成许多单裂纹的迭加. 这里假定, 一条裂纹处在上半平面, 裂纹表面载荷为 $P - iQ$. 此时由式 (56) 和 (57), 经过复位函数的平移和旋转变换, 可以得到复位函数 $\phi_p(z)$ 和 $\psi_p(z)$ ^[2]. 再通过式 (166) 和 (167) 可得复位函数 $\phi_c(z), \psi_c(z)$ (定义于上半平面) 和 $\phi_2(z), \psi_2(z)$ (定义于下半平面). 与上面的式 (76) 类似, 利用迭加原理, 可得相应的 Fredholm 积分方程^[14,131]. 在此方程中, 裂纹面上的作用力为未知函数.

对于黏合半平面问题, 若作用于上 (下) 平面远的载荷各为 $\sigma_x^\infty = p_1 (\sigma_x^\infty = p_2)$, 则必须适合下列变形协调条件^[132]

$$p_1/E_1 = p_2/E_2, \text{ 对平面应力情况} \quad (169)$$

若利用奇异积分方程且以位错密度为未知函数, 则某些黏合半平面中的裂纹问题就可得到解决^[57~61,133].

当黏合半平面中有若干裂纹及位错时, 用统一的方法来考虑它们之间的相互作用. 在此法中, 利用了黏合半平面中点位错基本解及迭加原理. 当裂纹靠近界面时, 给出了一些例子以说明相互作用^[134]. Isida 等^[135] 利用力偶极子方法其来解决黏合半平面中的裂纹问题.

Wang 等^[136] 利用特征展开变分原理 (the eigenfunction expansion variational method, EEVM) 解决了有限黏合双材料中承受轴向拉伸时的界面裂纹问题. 由于裂纹在界面上, 裂纹端应力存在着振荡奇异性. Chen 等^[137,138] 详细分析了黏合双材料的界面裂纹及裂纹端应力场.

12 弹性半平面或带形域或有限区域的多裂纹问题

为了求解提出的问题, 采用下列步骤: (1) 利用迭加原理; (2) 利用修正复位函数这一概念; (3) 选取裂纹表面作用力为未知函数, 弹性半平面或有限区域的多裂纹问题便可通过一个 Fredholm 积分方程建立起来^[14].

12.1 弹性半平面区域的多裂纹问题

为了求解带有自由边界弹性半平面区域的多裂纹问题 (图 7(c)), 必须先推导出相关的修正复位函数. 令 $G_2 = 0$, 由式 (166) 和 (168) 可得 $\delta_1 = \delta_2 = -1$, 又可得

$$\phi_1(z) = \phi_p(z) - z \bar{\phi}'_p(z) - \bar{\psi}_p(z)$$

$$\psi_1(z) = \psi_p(z) - \bar{\phi}_p(z) + z(\bar{\phi}'_p(z) + z\bar{\phi}''_p(z) + \bar{\psi}'_p(z))$$

$$z \in S^+ + L_b$$

$$(170)$$

在目前情况下, 复位函数 $\phi_p(z)$ 和 $\psi_p(z)$ 仍先由式 (56) 和 (57) 导出, 经过复位函数的平移和转动变换^[2,14]. 类似地, 利用迭加原理后, 可得类似于式 (84) 的 Fredholm 积分方程^[14,139]. 在积分方程中, 裂纹上的作用载荷为未知函数. 若半平面边界

为固定, 相应的多裂纹问题也可同样求解, 只要在式 (168) 中令 $G_2 \rightarrow \infty$.

Chen 等^[140]和 Ioakimidis 等^[141]建议用奇异积分方程方法求解弹性半平面的多边缘裂纹和多曲线裂纹问题. 有学者建议用弱奇异积分方程方法求解弹性半平面的边缘裂纹和曲线裂纹问题^[142,143]. Mogilevskaya 等^[121]推导出一种超奇异积分方程求解弹性半平面的任意形状的裂纹问题.

12.2 带形域或有限区域的多裂纹问题

类似于第 12.1 节中的推导, 带形域或有限区域的多裂纹问题也可用同样方法解决 (图 7(d), 图 7(e))^[144,145]. 此时, 为了求解提出的问题, 应采用下列步骤: (1) 利用迭加原理; (2) 利用修正复位函数这一概念; (3) 选取裂纹表面作用力为未知函数.

同样, 复位函数可表示为

$$\phi(z) = \phi_p(z) + \phi_c(z), \psi(z) = \psi_p(z) + \psi_c(z) \quad (171)$$

其中 $\phi_p(z)$ 和 $\psi_p(z)$ 为复位函数的主要部分, 它是基于单裂纹问题作用有一般载荷 $P(s) - iQ(s)$ 时的解, $\phi_c(z)$ 和 $\psi_c(z)$ 为复位函数的补充部分. 复位函数 $\phi_c(z)$ 和 $\psi_c(z)$ 的作用是消除复位函数 $\phi_p(z)$ 和 $\psi_p(z)$ 在周界上引起的作用力. 不过, 在目前情况下, 复位函数的补充部分是用数值方法得到的. 这种思路类似于 Laplace 方程中的 Green 函数解法.

利用 Muskhelishvili 提出的复位函数及保角映射, 得到了一个带形域含二条半无限裂纹问题的精确解^[146], 这个新型的保角映射是由该文第 2 作者创立的. 由此方法, 还可以得出某些不同质材料的裂纹问题的推广结果.

13 圆形区域的多裂纹问题

在以下分析中, 考虑有限圆形区域的多裂纹问题 (图 8). 这里提到的修正复位函数概念与第 11.1 节中所提的类似^[12,14]. 此时, 可把修正复位函数 (由 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 组成) 表示成

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi_p(z) + \phi_c(z) \\ \psi(z) &= \psi_p(z) + \psi_c(z), z \in S^+ + C_R \end{aligned} \quad (172)$$

式中 C_R 表示圆周边界, S^+ 表示圆形区域 (图 8). 在式 (172) 中, 原始复位函数由 $\phi_p(z)$ 和 $\psi_p(z)$ 构成, $\phi_c(z)$ 和 $\psi_c(z)$ 代表复位函数的补充部分.

原始复位函数相当于单裂纹情况的一个特解, 它如式 (56) 和 (57) 所示. 同时, $\phi_c(z)$ 和 $\psi_c(z)$ 为圆

形域内的全纯函数. 和前类同, 复位函数 $\phi_c(z)$ 和 $\psi_c(z)$ 的作用是消除复位函数 $\phi_p(z)$ 和 $\psi_p(z)$ 在圆周边界上引起的作用力. 修正复位函数的功能是事前消除圆周上的作用力. 这样, 此法可有效地改进求解的技巧.

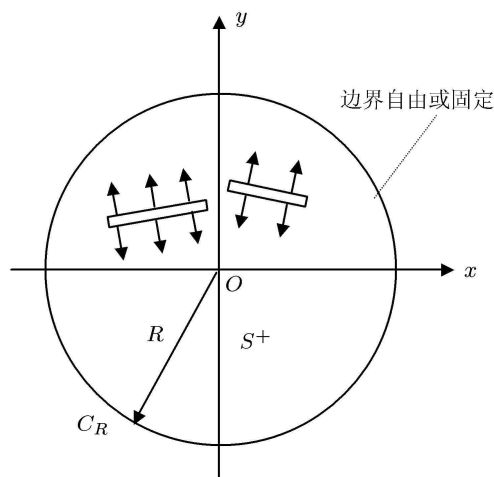


图 8 圆形区域的多裂纹问题

当点 t 在圆周 C_R 上, 即 $t \in C_R$, 有关系式 $t\bar{t} = R^2$ (R 为圆的半径). 从而, 由式 (26), 圆周自由条件可表成为

$$\overline{\phi(t)} + \frac{R^2}{t} \phi'(t) + \psi(t) = 0, t \in C_R \quad (173)$$

只要把式 (172) 代入到 (173) 可得

$$\begin{aligned} \phi_c(z) &= -z\bar{\phi}'_p(z) \left(\frac{R^2}{z} \right) - \bar{\psi}_p(z) \left(\frac{R^2}{z} \right) + \gamma z \\ \psi_c(z) &= -\bar{\phi}_p(z) \left(\frac{R^2}{z} \right) - \phi'_c(z) \left(\frac{R^2}{z} \right) - \gamma \frac{R^2}{z} \\ z &\in S^+ + C_R \end{aligned} \quad (174)$$

式中

$$\gamma = \frac{b_1}{2R^2}, \psi_p(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} \quad (175)$$

若圆周是固定的, 此时修正复位函数 $\phi_c(z)$ 和 $\psi_c(z)$ 将取决于下式

$$-\kappa \overline{\phi(t)} + \frac{R^2}{t} \phi'(t) + \psi(t) = 0, t \in C_R \quad (176)$$

类似于第 12 节所述, 只要采用下列步骤: (1) 利用迭加原理; (2) 利用修正复位函数这一概念; (3) 选取裂纹表面作用力为未知函数, 圆形区域的多裂纹问题便可通过一个 Fredholm 积分方程建立起来^[14].

当圆形边界为自由或固定时, 有限圆形域和圆孔外无限域的多裂纹问题均有一些解答 [147~150]. 对于受内压圆筒的多裂纹问题, 曾得到了解答. 在此问题中, 复位函数的补充部分的推导要复杂一些. 但从概念来说, 推导的思路是类似于前述情况中提出的 [151].

利用 Fredholm 积分方程方法, 旋转圆盘的多裂纹问题得到了解决 [152]. 文 [153~155] 选用分布位错为未知函数, 用奇异积分方程解决圆形域的裂纹问题. 一些学者提出了种种方法, 用于圆形域的裂纹问题 [40,41,59,156,157].

Fett^[158] 利用边界配置法和权函数法, 求出了带边缘裂纹开裂圆盘中的裂纹端应力强度因子. Dong 等^[159] 利用类似的方法, 求出了受压中心开裂圆盘中裂纹端应力强度因子.

14 多裂纹问题中的 T 应力

在断裂分析中, T 应力的分析也是一个重要课题 [12,14].

14.1 T 应力在断裂分析中的作用

早在 1957 年, 裂纹端应力分布得到了研究 [160]. 在圆柱坐标系 (r, θ) 中, 应力分量可表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} f_{11}(\theta) & f_{12}(\theta) \\ f_{12}(\theta) & f_{22}(\theta) \end{bmatrix} + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} g_{11}(\theta) & g_{12}(\theta) \\ g_{12}(\theta) & g_{22}(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (177)$$

上式中为首二项是奇异的, 而第 3 项是有限的. 第 3 项称为 T 应力, 它作用在裂纹方向 [161]. 最近, 已认识到 T 应力在断裂过程中起的作用. 这意味着, 断裂过程由裂纹端的应力强度因子和 T 应力二个参量所控制 [162].

14.2 单条裂纹时的 T 应力分析

在讨论多裂纹问题中的 T 应力以前, 先分析单条裂纹问题中的 T 应力. 在分析中, 假定裂纹二表面作用有大小相等方向相反的力, 且无限远处无载荷作用 (图 2(a)). 此时, 边界条件如下

$$(\sigma_y - i\sigma_{xy})^+ = (\sigma_y - i\sigma_{xy})^- = P(t) - iQ(t), |t| < a \quad (178)$$

式中 $P(t)$ 和 $Q(t)$ 为法向和切向载荷, (+)(或 -) 代表裂纹的上 (或下) 侧. 经过一系列推导后, 可得

此问题的复位函数. 其次, 可得裂纹端 A 和 B 的 T 应力如下

$$T_A = P(-a), \quad T_B = P(a) \quad (179)$$

14.3 多裂纹问题中的 T 应力

当无限平板作用远处载荷 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \sigma_{xy}^\infty$ 且裂纹表面为自由时, 利用迭加原理, 多裂纹问题可转化为下列二个问题 [12,14].

(1) 无裂纹无限平板受远处载荷作用.

(2) 许多单裂纹问题并且裂纹表面作用有载荷 $P_j(s_j) - iQ_j(s_j)$ (图 5(a)).

基于迭加原理的应用, 可得一组 Fredholm 积分方程. 其次, 利用求积公式后, 可得关于 $P_j(s_j) - iQ_j(s_j)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) 的解. 最后, 裂纹端的 T 应力即可得出, 它由 3 部分组成. 第 1 部分来自均匀应力场, 这部分易求得. 第 2 部分来自所考虑那条裂纹上的载荷本身. 第 3 部分来自其余诸裂纹上的载荷对所考虑那条裂纹的影响. 求 T 应力的数值例子可见文 [163].

14.4 相关研究工作

对于圆弧形裂纹, 裂纹端的 T 应力可由已知闭合形式解中得出. 对于带尖点的裂纹, 利用保角映射后, T 应力也可由应力场中分离出来 [164]. Chen 等^[165] 建议用新型权函数法求解平面弹性裂纹的 T 应力问题. 在集中力作用下, 方形板中裂纹端的 T 应力被得出.

得出了界面宏观裂纹端的 T 应力, 它是由众多邻近微裂纹引起的. 在各种条件下, 得出了许多 T 应力的数值结果 [166,167]. 采取用于各向同性材料的类似方法, 得出了各向异性材料多裂纹问题的 T 应力 [168]. 利用边界单元方法, 建议了一个求 T 应力的简便公式 [169]. 经与 1/4 裂纹端单元的位移和经典解对比后, 便得出此公式.

15 反平面弹性中的多裂纹问题

对于反平面弹性中的多裂纹问题, 它的形成和许多有关解答介绍如下:

15.1 多裂纹问题的构成

在反平面弹性中, 介绍一个复位函数如下 [7,12,14]

$$\phi(z) = Gw(x, y) + if(x, y) \quad (180)$$

式中 G 为剪切弹性模量, $w(x, y)$ 为纵向位移, $f(x, y)$ 是合力函数. 由 Cauchy-Riemann 条件, 应力分量可写成

$$\sigma_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad (181)$$

此外, 还有下列各式

$$\Phi(z) = \phi'(z) = G \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma_{xz} - i \sigma_{yz} \quad (182)$$

$$f(x, y) = \int^{(x, y)} \sigma_{xz} dy - \sigma_{yz} dx \quad (183)$$

对于处于区间 $(-a, a)$ 上的裂纹, 可设边界条件如下

$$\sigma_{yz} = p(s), \quad |s| < a \quad (184)$$

式中 $p(s)$ 为给定的载荷. 经过一系列推导, 可得基本解, 或一个复位函数如下

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi X(z)} \int_{-a}^a \frac{p(t)X(t)dt}{t-z} \quad (185)$$

考虑到此复位函数在裂纹本身处及其它位置处的影响, 便可得一个 Fredholm 积分方程组 [12,14,170]. 若基于连续的位错分布, 对此问题也可以建立奇异积分方程组 [7,14]. 总言之, 反平面弹性中的多裂纹问题的构成类似于平面弹性中相应问题的构成.

15.2 反平面弹性中的多裂纹问题的某些解答

Chen 等 [171] 得到反平面弹性中的多裂纹问题的某些解答, 如: (1) 圆形域的多裂纹问题的某些解答; (2) 矩形域的多裂纹问题的某些解答 [172]. 这些解答均依赖于修正复位函数这一概念的应用.

15.3 扭转杆多裂纹问题的某些解答

扭转杆中的裂纹问题类似于反平面弹性中的同类问题. 二类问题都由 Laplace 方程决定. Chen 等 [173] 建议用 Fredholm 积分方程求解扭转杆中的多裂纹问题. 用计算柔度法解出下列扭转杆中的多裂纹问题: (1) 矩形扭转杆中的 [174]; (2) 圆形扭转杆中的 [175]. 有学者用复变函数方法求解扭转杆的边缘裂纹问题 [176]. 还有学者用奇异积分方程求解扭转杆的裂纹问题 [15,177,178].

16 周期裂纹问题

现介绍周期裂纹问题和双周期裂纹问题的解如下:

16.1 用奇异积分方程求解周期裂纹问题

在图 9 中表示了一个周期裂纹问题. 此问题可看成许多有分布位错密度 $g'(t)$ 的单裂纹问题的迭加 (图 9(a)). 设裂纹上的力边界条件为 $\sigma_y - i\sigma_{xy} = p(s) - iq(s)$. 经过一系列推导, 可得奇异积分方程如下 [7,14]

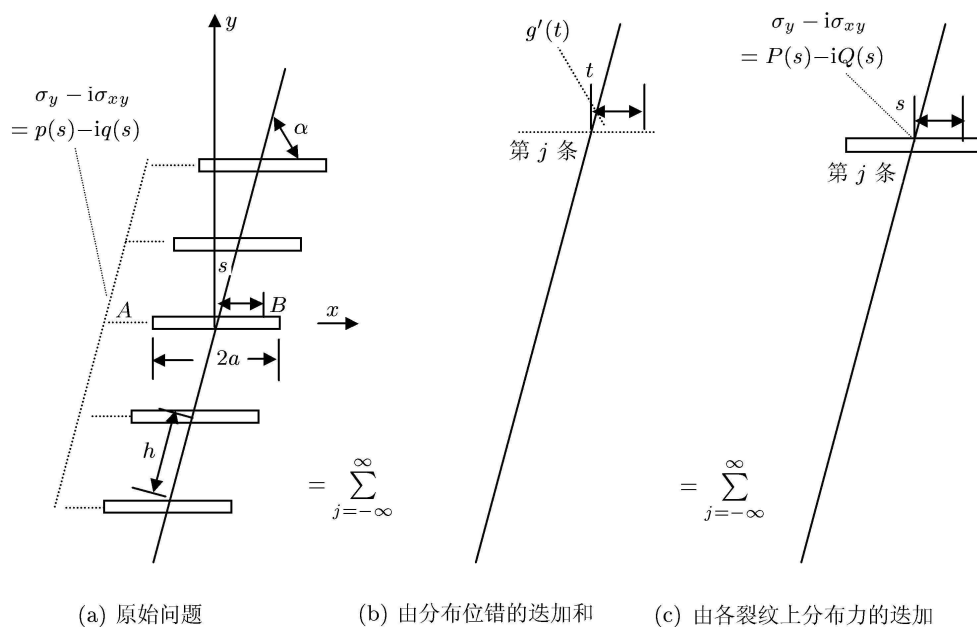


图 9 周期裂纹问题的迭加方法

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a g'(t) K(t, t_0) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \overline{g'(t)} L(t, t_0) dt = p(t_0) - iq(t_0), |t_0| < a \quad (186)$$

又有

$$K(t, t_0) = \frac{\pi}{2h} (\delta \operatorname{ctg} \frac{\delta \pi(t-t_0)}{h} + \bar{\delta} \operatorname{ctg} \frac{\bar{\delta} \pi(t-t_0)}{h})$$

$$L(t, t_0) = \frac{\pi}{2h} (\delta - \delta^3) \left[\operatorname{ctg} \frac{\delta \pi(t-t_0)}{h} - \frac{\delta \pi(t-t_0)}{h} \right] / \sin^2 \left(\frac{\delta \pi(t-t_0)}{h} \right) \quad (187)$$

式中 $\delta = \exp(i\alpha)$, 值得注意, 当 $t \rightarrow t_0$ 时函数 $K(t, t_0)$ 有如下奇异性 $1/(t-t_0)$. Savruk^[7] 给出了一些数值解.

16.2 用 Fredholm 积分方程求解周期裂纹问题

用另一种方法求解此问题. 此问题可看成许多有分布力密度 $\sigma_y - i\sigma_{xy} = P(s) - iQ(s)$ 的单裂纹问题的迭加 (图 9(b)). 设裂纹上的力边界条件为 $\sigma_y - i\sigma_{xy} = p(s) - iq(s)$. 经过一系列推导, 可得 Fredholm 积分方程如下^[14]

$$P(t_0) - iQ(t_0) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-a_j}^{a_j} [P(t) - iQ(t)] \cdot C_j(t, t_0) dt + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-a_j}^{a_j} [P(t) + iQ(t)] \cdot D_j(t, t_0) dt = p(t_0) - iq(t_0), |t_0| < a \quad (188)$$

式中 $C_j(t, t_0)$ 和 $D_j(t, t_0)$ 为正常函数^[14]. 利用此 Fredholm 积分方程, 得到了双排周期裂纹问题的解^[179].

16.3 周期裂纹群问题的解和余项估算技术

显然, 周期裂纹群问题是多裂纹问题的一个特殊问题^[180,181]. 在此问题中, 裂纹群是周期排列的, 每一裂纹群中有几条裂纹. 从而, 此问题的解法类似于一般多裂纹问题的解法. 然而, 若仅考虑邻近有限个裂纹群对中心群的影响, 计算中的误差就难以估计. 正因为考虑到此情况, 提出了一种余项估算技术. 若利用 Fredholm 积分方程, 积分方程离散后的代数方程如下

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{p} \quad (189)$$

式中 $\mathbf{A}$ 为影响矩阵, $\mathbf{p}$ 代表裂纹上作用的已知载荷, $\mathbf{X}$ 代表未知向量. 矩阵 $\mathbf{A}$ 可写成下式

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \sum_{j=1}^{N-1} (\mathbf{A}_{-j} + \mathbf{A}_j) + \sum_{j=N}^{\infty} (\mathbf{A}_{-j} + \mathbf{A}_j) \quad (190)$$

在式 (190) 中, 矩阵 $\mathbf{A}_0$ 表示中心裂纹群对自身的影响, 矩阵 $\mathbf{A}_{-j}(\mathbf{A}_j)$ 表示下侧和上侧第 j 个裂纹群对中心裂纹群的影响. 对于上述影响矩阵言, 已知有下列性质

$$j^2(\mathbf{A}_{-j} + \mathbf{A}_j) \approx (j+1)^2(\mathbf{A}_{-j-1} + \mathbf{A}_{j+1}) \quad (191)$$

基于此性质, 式 (190) 中第 3 项可改写为

$$\sum_{j=N}^{\infty} (\mathbf{A}_{-j} + \mathbf{A}_j) \approx \delta(\mathbf{A}_{-N} + \mathbf{A}_N) \quad (192)$$

其中

$$\delta = \left(\sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right) / \left(\frac{1}{N^2} \right) = N^2 \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j^2} \right) \quad (193)$$

等式 (192) 意味着, 远处诸裂纹群的影响可用一项来近似代替, 这就称为余项估算技术. 数值解表明, 这个技术对于周期裂纹群问题是十分有效的.

16.4 用特征展开变分原理方法 (the eigenfunction expansion variational method, EEVM) 求解双周期裂纹问题

在较早年代, 双周期裂纹问题得到研究^[182,183]. 为了求解此问题, Chen 等^[184,185]介绍过另一种方法. 对于双周期裂纹问题, 可从无限大板中割出一个矩形单元. 此时, 可用特征展开变分原理方法求解此问题^[184,185].

设无限大板含有双周期裂纹问题, 远处载荷为 $\sigma_x^\infty = 0$, $\sigma_{xy}^\infty = 0$ 和 $\sigma_y^\infty = p$ (图 10). 若从无限大板中割出一个矩形单元, 则可写出边界条件

$$v = \bar{v} = \pm v_b, \sigma_{xy} = 0, -b \leq x \leq b, y = \pm h$$

$$u = \bar{u} = \pm u_b, \sigma_{xy} = 0, x = \pm b, -h \leq y \leq h \quad (194)$$

式中二个常数 v_b 和 u_b 由下式决定

$$\int_0^b \sigma_y(x, h) dx = bp, \int_0^h \sigma_x(b, y) dy = 0 \quad (195)$$

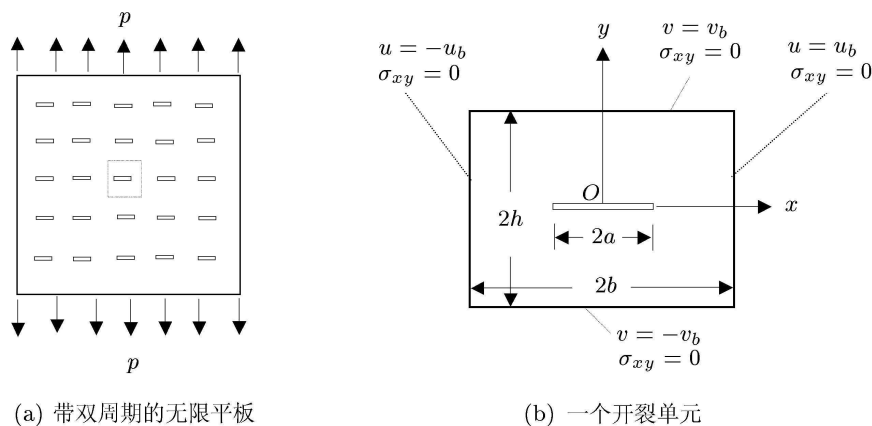


图 10

此时, 复位函数可表示为

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{2M} X_k \phi^{(k)}(z), \quad \psi(z) = \sum_{k=1}^{2M} X_k \psi^{(k)}(z) \quad (196)$$

式中函数 $\phi^{(k)}(z)$, $\psi^{(k)}(z)$ ($k = 1, 2, \dots, 2M$) 应满足: (1) 裂纹表面自由条件; (2) 位移单值条件. 其中, 系数 X_k ($k = 1, 2, \dots, 2M$) 可由特征展开变分原理方法得出. 最后, 裂纹端的 T 应力和应力强度因子可以得出.

Karihaloo^[186] 等给出了一个双排周期裂纹问题的解法. 在此法中, 取裂纹上作用的载荷为未知函数. 利用迭加原理, 导出了一个 Fredholm 积分方程. 在此方程中, 积分核具有闭合形式. 把复位函数展开成级数形式, 解出了双排周期裂纹问题. 从双重级数的求和中, 得到了一个近似值, 又给出了许多数值结果^[187].

17 结 论

本综述的主要结论如下

17.1 复变函数的应用

虽然复变函数方法在平面弹性力学已应用多年^[2,5], 它在裂纹问题中的应用出现在较晚年代^[7,12,14,32,36,42]. 应用此法的物理背景是显而易见的. 假设无限平板中有一曲线裂纹 L (图 1). 一旦开裂板被拉伸, 沿着裂纹线 L 必然会出现开口位移. 换言之, 在裂纹处存在位移间断, 或有

$$(u(t) + iv(t))^+ - (u(t) + iv(t))^- (t \in L)$$

式中 $(u(t) + iv(t))^+$ ($(u(t) + iv(t))^-$) 代表裂纹上(下)侧的位移 (图 1). 与此同时, 对于 Cauchy 型积分 $F(z) = (1/2\pi i) \int_L f(t) dt / (t - z)$, 由式 (7) 和 (11) 可

知有下列性质 $F^+(t) - F^-(t) = f(t)$ ($t \in L$). 由于 Cauchy 型积分, 或复位函数 $F(z)$, 可以模拟动点越过裂纹线时的间断性, Cauchy 型积分广泛用于裂纹问题中就不足为奇了. 但是, 平面弹性中的位移表示式为

$$2G(u + iv) = \kappa \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (197)$$

它是通过 2 个复位函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 构成的. 此时, 同单个 Cauchy 型积分比, 有关推导要繁杂一些. 然而, 在裂纹问题中, 利用 Cauchy 型积分极限值的间断性是十分本质的.

17.2 积分方程的构成

复变函数方法的第 2 个显著特点是在裂纹问题积分方程的构成方面. 考虑裂纹问题的直接边界元方法的形成过程如下: 假设孔口上作用有某些载荷. 利用 Somigliana 位移等式后, 便可得到区域内点处的位移和应力. 若孔口周界压扁为一裂纹时, 若令观察点趋近于裂纹表面, 便可得超奇异积分方程. 不过, 这个过程是形式上的, 而观察点趋近于裂纹表面的极限过程并不明显.

当利用复变函数方法构成积分方程时, 只要采用下列步骤 (参看图 5(b)): (1) 利用迭加原理; (2) 在各裂纹位置处设立位错密度; (3) 选取裂纹上的载荷为未知函数, 便自然地得到多裂纹问题的奇异积分方程, 它如式 (75) 所示. 在推导时, 只要利用式 (31) 和 (62). 这个推导是非常简捷又清楚的, 这是其它方法无法达到的. 与此同时, 还可以把奇异积分方程正则化. 经正则化后, 得到的 Fredholm 积分方程如式 (80) 所示. 显然, 基于奇异积分方程的基本知识, 才可能实施此正则化^[25].

若用裂纹表面载荷为未知函数, 可得一种多裂纹问题的 Fredholm 积分方程. 它如式 (84) 所示. 相对而言, Fredholm 积分方程方法更容易为工程师所接受.

17.3 修正复位函数概念的应用

从本质上说, 修正复位函数这一概念等价于求解 Laplace 方程边值问题时的 Green 函数方法. 不过, 当把修正复位函数用于裂纹问题时, 有关推导要长一些.

在圆形区域情况下, 要考虑修正复位函数的构成问题 (图 8), 圆周边界自由条件等价于由式 (26) 所示的 $f = -Y + iX$ 沿着同一边界为零. 由式 (26), 此条件可改写为

$$\overline{\phi(z)} = -\bar{z}\phi'(z) - \psi(z), z \in C_R \quad (198)$$

式中 C_R 表示圆周边界. 值得注意, 式 (198) 的左端项, 或 $\overline{\phi(z)}$ 是解析函数 $\phi(z)$ 在点 z 处的共轭值 ($z \in C_R$). 然而, 右端项, 或 $-\bar{z}\phi'(z) - \psi(z)$ 并不是一个纯粹解析函数在点 z 处的值. 从而, 直接从式 (198) 不能导出有用的东西.

显然, 对于任意圆周 C_R 上的点 z ($z \in C_R$), 恒有 $z\bar{z} = R^2$ (R 为圆周半径). 从而, 式 (198) 所示的圆周边自由条件可改写为

$$\overline{\phi(z)} = -\frac{R^2}{z}\phi'(z) - \psi(z), z \in C_R \quad (199)$$

和式 (198) 不同, 式 (199) 的右端项, 或 $-R^2\phi'(z)/z - \psi(z)$ 已是一个纯粹解析函数在点 z 处的值. 从而, 由式 (199) 可得到一些方便.

此时, 修正复位函数 (由 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 构成) 可表示成

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi_p(z) + \phi_c(z), \psi(z) = \psi_p(z) + \psi_c(z) \\ z &\in S^+ + C_R \end{aligned} \quad (200)$$

其中, 原始复位函数由 $\phi_p(z)$ 和 $\psi_p(z)$ 是事先给定的, $\phi_c(z)$ 和 $\psi_c(z)$ 代表复位函数的补充部分. 把式 (200) 代入到式 (199) 中, 复位函数的补充部分 $\phi_c(z)$ 和 $\psi_c(z)$ 即可得到, 它们如式 (174) 和 (175) 所示.

运用修正复位函数的特殊优点是显而易见的. 例如在上述圆形域问题中, 修正复位函数已事先满足圆形周界自由条件, 从而此条件已不再是问题的条件. 由此可知, 修正复位函数这个概念是重要的. 它扩大了问题的求解范围, 例如把无限平板

中的多裂纹问题的求解推广到圆板中的多裂纹问题的求解. 类似的构思, 可用于黏合半平面的裂纹问题中.

参考文献

- 1 Griffith A A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil Trans Roy Soc London, Ser.* 1921, A221: 163~197
- 2 Muskhelishvili N I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. The Netherlands: Noordhoff, 1953
- 3 Liebowitz H, ed. Fracture An Advanced Treatise, Vol. 2, Mathematical Fundamentals. New York: Academic Press, 1968
- 4 Sneddon I N, Lowengrub M. Crack Problems in Classical Theory of Elasticity. New York: Wiley, 1969
- 5 England A H. Complex Variable Methods in Elasticity. London: Wiley, 1971
- 6 Sih G C, ed. Mechanics of Fracture, Vol. 1, Method of Analysis and Solutions of Crack problems. Leyden: Noordhoff, 1973
- 7 Savruk M P. Two-dimensional Problems of Elasticity for Body with Crack. Kiev: Naukava Dumka, 1981 (in Russian)
- 8 Parton V Z, Perlin P I. Integral Equations in Elasticity. Moscow: Mir Publishers, 1982
- 9 Kanninen M F, Popelar C H. Advanced Fracture Mechanics. Oxford: Oxford University Press, 1985
- 10 Parton V Z, Morozov E M. Mechanics of Elastic-Plastic Fracture. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1989
- 11 Aliabadi M H, Rooke D P. Numerical Fracture Mechanics. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1991
- 12 Chen Y Z. A survey of new integral equations in plane elasticity crack problem. *Eng Fract Mech*, 1995, 51: 97~134
- 13 Linkov A M. Boundary Integral Equations in Elasticity Theory. Dordrecht: Kluwer, 2002
- 14 Chen Y Z, Hasebe N, Lee K Y. Multiple Crack Problems in Elasticity. Southampton: WIT Press, 2003
- 15 Tang R J. Theory of Cracked Torsion Bars. Shanghai: Jiao Tong University Press, 1996(in Chinese)
- 16 Li Z L, Wang Y H, Li T J. Numerical Methods in Fracture Mechanics. Beijing: Di Zheng Press, 1996 (in Chinese)
- 17 Fan T Y. Foundation of Fracture Theory. Beijing: Science Press, (In Chinese) 2003
- 18 Murakami Y, ed. Stress Intensity Factors Handbook. Vol.1, Oxford: Pergamon, 1987
- 19 Murakami Y, ed. Stress Intensity Factors Handbook. Vol.2, Oxford: Pergamon, 1987
- 20 Murakami Y, ed. Stress Intensity Factors Handbook. Vol.3, Oxford: Pergamon, 1992
- 21 Murakami Y, ed. Stress Intensity Factors Handbook. Vol.4, Oxford: Pergamon, 2001
- 22 Murakami Y, ed. Stress Intensity Factors Handbook. Vol.5, Oxford: Pergamon, 2001
- 23 Erdogan F. *Complex Function Technique*. New York: Academic Press, 1975

- 24 Woods L C. *Analytic Function Theory*. New York: Academic Press, 1975
- 25 Muskhelishvili N I. *Singular Integral Equations*. The Netherlands: Noordhoff, 1953
- 26 Aparicio N D. Elastic complex analysis and its applications in fracture mechanics. *Int J Solids Struc*, 2000, 37: 3873~3895
- 27 Chen Y Z. Complex potentials in plane elasticity by distribution of dislocation or force doublet along a curve. *Int J Eng Sci*, 1998, 36: 23~31
- 28 Nisitani H. Solution of Notch problems by Body Force Method, *Mechanics of Fracture*. Vol. 5. In: Sih G C, ed. Leyden: Noordhoff, 1978. 1~68.
- 29 Nisitani H, Chen D H. Body Force Method. Hangzhou: Zhejiang University press, 1990 (in Chinese, Translation from Japanese),
- 30 Chen Y Z. Derivation of two-dimensional Green's functions for bimaterials by means of complex variable function technique. *Int J Fract*, 1993, 60: R9~13
- 31 Carvalho J L, Curran J H. Two dimensional Green's functions for elastic bi-materials. *J Appl Mech*, 1992, 59: 321~327
- 32 Erdogan F. Stress intensity factors. *J Appl Mech*, 1983, 50: 992~1002
- 33 Sih G C, Paris P C, Erdogan F. Crack-tip, stress intensity factors for plane extension and plate bending problem. *J Appl Mech*, 1962, 2: 306~311
- 34 Dempsey J P. The wedge subjected to tractions: a paradox resolved. *J of Elasticity*, 1981, 11: 1~10
- 35 Ting T C T. The wedge subjected to tractions: a paradox re-examined. *J of Elasticity*, 1984, 14: 235~247
- 36 Panasyuk V V, Savruk M P, Datsyshyn A P. A general method of solution of two-dimensional problems in the theory of cracks. *Eng Fract Mech*, 1997, 9: 481~497
- 37 Chen Y Z. Numerical solution for a cruciform crack problem. *Int J Fract*, 1993, 63: R31~34
- 38 Chen Y Z, Hasebe N. New integration scheme for branch crack problem. *Eng Fract Mech*, 1995, 52: 791~801
- 39 Chen Y Z, Hasebe N. An alternative Fredholm integral equation approach for multiple crack problem and multiple rigid line problem in plane elasticity. *Eng Fract Mech*, 1992, 43: 257~268
- 40 Rooke D P, Tweed J. The stress intensity factors of a radial crack in a point loaded disc. *Int J Eng Sci*, 1973, 11: 285~290
- 41 Yarema S Y. Analysis of cracked disk specimens. *Eng Fract Mech*, 1979, 12: 365~375
- 42 Chen Y Z. A Fredholm integral equation approach for multiple crack problem in an infinite plate. *Eng Fract Mech*, 1984, 20: 767~776
- 43 Erdogan F, Gupta G D, Cook T S. Numerical Solution of Singular Integral Equation, *Mechanics of Fracture*. Vol. 1. In: Sih G C, ed. Leyden: Noordhoff, 1973. 368~425
- 44 Gross D. Stress intensity factors of systems of cracks. *Ing Archs*, 1982, 51: 301~310
- 45 Horii H, Nemat-Nasser S. Elastic fields of interacting inhomogeneities. *Int J Solids Struc*, 1985, 21: 731~745
- 46 Benveniste Y, Dvorak G J, Zarzour J, Wung C J. On interacting cracks and complex crack configurations in linear elastic media. *Inter J Solids Struc*, 1989, 25: 1279~1293
- 47 Kachanov M. Elastic analysis with many cracks: a simple method of analysis. *Int J Solids Struc*, 1987, 23: 23~43
- 48 Kachanov M, Montagut E. Interaction of a crack with certain microcrack arrays. *Eng Fract Mech*, 1986, 25: 625~636
- 49 Kachanov M. On the problems of interactions and crack coalescence. *Int J Fract*, 2003, 120: 537~543
- 50 Gorbatiikh L, Kachanov M. A simple technique for constructing the full stress and displacement fields in elastic plates with multiple cracks. *Eng Fract Mech*, 2000, 6: 51~63
- 51 Li Y P, Tham L G, Wang Y H, Tsui Y. A modified Kachanov method for analysis of solids with many cracks. *Eng Fract Mech*, 2003, 70: 1115~1129
- 52 Tamate O. Two arbitrarily situated cracks in an elastic plate under flexure. *Int J Solids Struc*, 1976, 12: 287~298
- 53 Tweed J, Rooke D P. The stress intensity factor for a crack at the edge of a loaded hole. *Int J Solids Struc*, 1979, 15: 899~906
- 54 Boduroglu H, Erdogan F. Internal and edge cracks in a plate of finite width under bending. *J Appl Mech*, 1983, 50: 621~629
- 55 Cinar A, Erdogan F. The crack and wedging problem for an orthotropic strip. *Int J Fract*, 1983, 23: 83~102
- 56 Civelek M B, Erdogan F. Crack Problem for a rectangular plate and an infinite strip. *Int J Fract*, 1982, 19: 139~159
- 57 Cook T S, Erdogan F. Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface. *Int J Engng Sci*, 1972, 10: 677~697
- 58 Delale F, Erdogan F. Bonded orthotropic strips with cracks. *Int J Fract*, 1979, 15: 343~364
- 59 Delale F, Erdogan F. Stress intensity factors in a hollow cylinder containing a radial crack. *Int J Fract*, 1982, 20: 251~265
- 60 Erdogan F, Aksogan O. Bonded half-planes containing an arbitrarily oriented crack. *Int J Solids Struc*, 1974, 10: 569~585
- 61 Erdogan F, Bircikoglu V. Two bonded half-planes with a crack going through the interface. *Int J Engng Sci*, 1973, 11: 745~766
- 62 Erdogan F, Gupta G D, Ratwani M. Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack. *J Appl Mech*, 1974, 41: 1007~1013
- 63 Keer L M, Lee J C, Mura T. Stress distributions for a quarter plane containing an arbitrarily oriented crack. *J Appl Mech*, 1983, 50: 43~49
- 64 Kishida M, Asano M. A study of interface of three parallel cracks. *Eng Fract Mech*, 1984, 19: 531~538
- 65 Krenk S. On the elastic strip with an internal crack. *Int J Solids Struc*, 1975, 11: 693~708
- 66 Rubinstein A A, Sadegh A M. Analysis of a crack emanating from a circular hole in a loaded plane. *Int J Fract*, 1986, 32: 47~57
- 67 Sekine H. Crack problem for a semi-infinite solid with heated bounding surface. *J Appl Mech*, 1977, 44: 637~642
- 68 Erdogan F. Mixed Boundary-value Problems in Mechanics, *Mechanics Today*. Vol. 4. In: Nemat-Nasser S, ed. New York: Pergamon, 1978. 1~84

- 69 Erdogan F. Approximate solutions of systems of singular integral equations. *SIAM J Appl Math*, 1969, 17: 1041~1059
- 70 Erdogan F, Gupta G D. On the numerical solution of singular integral equations. *Q Appl Math*, 1972, 29: 525~534
- 71 Boiko A V, Karpenko L N. On some numerical methods for the solution of the plane elasticity problem for bodies with cracks by means of singular integral equations. *Int J Fract*, 1981, 17: 381~388
- 72 Chen Y Z. Collinear crack problem in antiplane elasticity for a strip of functionally graded materials. *J Mech*, 2004, 20: 167~175
- 73 Sneddon I N. Integral transform methods, Mechanics of Fracture. Vol. 1. Sih G C, ed. Leyden: Noordhoff, 1973. 315~367
- 74 Sneddon I N. The Use of Integral Transforms. New York: Wiley, 1972
- 75 Sneddon I N. Application of Integral Transforms in the Theory of Elasticity. Wien: Springer, 1975
- 76 Chen Y Z. Crack problem in plane elasticity under anti-symmetric loading. *Int J Fract*, 1989, 41: R29~34
- 77 Chudnovsky A, Dolgopolsky A, Kachanov M. Elastic interaction of a crack with a microcrack array- I. Formulation of the problem and general form of the solution. *Int J Solids Struct*, 1987, 23: 1~10
- 78 Chudnovsky A, Dolgopolsky A, Kachanov M. Elastic interaction of a crack with a microcrack array- II. Elastic solution for two crack configurations (piecewise constant and linear approximations). *Int J Solids Struct*, 1987, 23: 11~21
- 79 Wang X M, Gao S, Chen Y H. Further investigation for the macro-microcrack interaction in the infinite isotropic body. *Inter J Solids Struct*, 1996, 33: 4051~4063
- 80 Rubinstein A A. Macrocrack interaction with semi-infinite microcrack array. *Int J Fract*, 1985, 27: 113~119
- 81 Rubinstein A A. Macrocrack-microdefect interaction. *J Appl Mech*, 1986, 53: 505~510
- 82 Kachanov M. Elastic solids with many cracks and related problem. In: Advance in Applied Mechanics Vol. 30 (Hutchinson J W, Wu T, eds). New York: Academic Press, 1993. 259~445
- 83 Feng X Q, Li J Y, YU S W. A simple method for calculating interaction of numerous microcracks and its applications. *Int J Solids Struct*, 2003, 40: 447~464
- 84 Zhao L G, Chen Y H. On the contribution of subinterface microcracks near the tip of an interface macrocrack to the J-integral in bimaterial solids. *Int J Engng Sci*, 1997, 35: 387~407
- 85 Chen Y H, Hasebe N. A consistency check for strongly interacting multiple crack problem in isotropic, bimaterial and orthotropic bodies. *Int J Fract*, 1998, 89: 333~353
- 86 Chen Y H. M-integral analysis for two-dimensional solids with strongly interacting microcracks. Part I: in an infinite brittle solid. *Int J Solids Struct*, 2001: 38: 3193~3212
- 87 Chen Y H, Lu T J. Recent developments and applications of invariant integrals. *Appl Mech Review*, 2003, 56: 515~552
- 88 Chen Y Z. Analysis of the M-integral in plane elasticity. *J Appl Mech*, 2004, 71: 572~574
- 89 Budiansky B, O'Connell R J. Elastic moduli of a cracked body. *Int J Solids Struct*, 1976, 12: 81~97
- 90 Wang J, Fang J, Karihaloo B L. Asymptotics of multiple crack interaction and prediction of effective modulus. *Int J Solids Struct*, 2000, 37: 4261~4273
- 91 Wang J, Fang J, Karihaloo B L. Asymptotic bounds on overall moduli of cracked bodies. *Int J Solids Struct*, 2000, 37: 6221~6237
- 92 Chen Y Z. New Fredholm integral equation for multiple crack problem in plane and antiplane elasticity. *Int J Fract*, 1993, 64: 63~77
- 93 Chen Y Z. Various integral equations for a single crack problem of elastic half-plane. *Eng Fract Mech*, 1994, 49: 849~858
- 94 Denda M, Dong Y F. Complex variable approach to the BEM for multiple crack problems. *Comput Methods Appl Mech Engng*, 1997, 141: 247~264
- 95 Denda M, Kosaka I. Dislocation and point force-based approach to the special Green's function BEM for elliptic hole and crack problem in two dimensions. *Int J Numer Meth Eng*, 1997, 40: 2857~2889
- 96 Chen Y Z. Elastic analysis of an infinite plate containing hole with cusps and applied by concentrated forces. *Eng Fract Mech*, 1984, 20: 573~582
- 97 Yan X Q. A numerical analysis of perpendicular cracks under general in-plane loading with a hybrid displacement discontinuity method. *Mech Res Commun*, 2004, 31: 175~183
- 98 Helsing J. Fast and accurate numerical solution to an elastostatic problem involving ten thousand randomly oriented cracks. *Inter J Fract*, 1999, 100: 321~327
- 99 Helsing J, Peters G. Integral equation methods and numerical solutions of crack and inclusion problems in plane elastostatics. *SIAM J Appl Math*, 1999, 59: 965~982
- 100 Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equation. Yale: University Press, 1923
- 101 Kaya A C, Erdogan F. On the solutions of integral equations with strongly singular kernels. *Quart Appl Mech*, 1987, 45: 105~122
- 102 Mayrhofer K, Fischer F D. Derivation of a new analytical solution for a general two-dimensional finite-part integral applicable in fracture mechanics. *Int J Numer Meth Eng*, 1992, 33: 1027~1047
- 103 Chen Y Z. Hypersingular integral equation for multiple crack problem in an infinite plate. *Acta Mech*, 1995, 108: 121~131
- 104 Chen Y Z. Numerical solution of multiple crack problem by using hypersingular integral equation. *Int J Fract*, 1997, 88: L9~14
- 105 Chen Y Z. Numerical solution of circular cracked plate problem by using hypersingular integral equation approach. *Com Numer Meth Eng*, 1998, 14: 451~461
- 106 Ioakimidis N I. Mangler-type principal value integrals in hypersingular integral equations for crack in plane elasticity. *Eng Fract Mech*, 1988, 31: 895~898
- 107 Linkov A M, Mogilevskaya S G. Finite-part integrals in problems of three-dimensional cracks. *Prikl Mat Mekh*, 1986, 50: 652~658

- 108 Linkov A M, Mogilevskaya S G. Complex hypersingular integrals and integral equations in plane elasticity. *Acta Mech*, 1994, 105: 189~205
- 109 Krenk S. On the use of the interpolation polynomial for solutions of singular integral equations. *Quar Appl Math*, 1975, 32: 479~484
- 110 Martin P A. Perturbed cracks in two dimensions: An integral-equation approach. *Int J Fract*, 2000, 100: 317~327
- 111 Chan Y S, Finnjiang A C, Paulino G H. Integral equations with hypersingular kernels-theory and application to fracture mechanics. *Int J Eng Sci*, 2003, 41: 683~720
- 112 Nied H F. Periodic array of cracks in a half-plane subjected to arbitrary loading. *J Appl Mech*, 1987, 54: 642~648
- 113 Chen Y Z. Hypersingular integral equation for a curved crack problem in half-plane. *Int J Fract*, 1992, 57: R41~45
- 114 Chen Y Z. Numerical solution of a curved crack problem by using hypersingular integral equation approach. *Eng Fract Mech*, 1993, 46: 275~283
- 115 Chen Y Z. Hypersingular integral equation for curved crack problem in antiplane elasticity. *Int J Fract*, 1994, 66: R19~21
- 116 Chen Y Z, Hasebe N. Hypersingular integral equation for a curved crack problem of circular region in antiplane elasticity. *J Appl Mech*, 1996, 63: 645~649
- 117 Chen Y Z. A numerical solution technique of hypersingular integral equation for curve cracks. *Com Numer Meth Eng*, 2003, 19: 645~655
- 118 Chen Y Z, Lin X Y, Wang Z X. Numerical solutions of hypersingular integral equation for antiplane elasticity curved crack problems of circular regions. *Acta Mech*, 2004, 173: 1~11
- 119 Chen Y Z. Numerical solutions of hypersingular integral equation for curved cracks in circular regions. *Inter J Fract*, 2005, 132: 205~222
- 120 Mogilevskaya S G, Rothenburg L, Dusseault M B. Interaction between a circular opening and fractures originating from its boundary in a piecewise homogenous plane. *Inter J Numer Anal Meth Geomech*, 2000, 24: 947~970
- 121 Mogilevskaya S G. Complex hypersingular integral equation for the piece-wise homogeneous half-plane with cracks. *Int J Fract*, 2000, 102: 177~204
- 122 Chen W H, Chen T C. An efficient dual boundary element technique for a two-dimensional fracture problem with multiple cracks. *Inter J Numer Meth Eng*, 1995, 38: 1739~1756
- 123 Ammons B A, Vable M. Boundary element analysis of cracks. *Inter J Solids Struct*, 1996, 33: 1853~1865
- 124 Wang Y B, Chau K T. A new boundary element for plane elastic problem involving cracks and holes. *Int J Fract*, 1997, 87: 1~20
- 125 Chau K T, Wang Y B. A new boundary integral formulation element for plane elastic bodies containing cracks and holes. *Int J Solids Struct*, 1999, 36: 2041~2074
- 126 Cheeseman B A, Santare M H. The interaction of a curve crack with a circular elastic inclusion. *Int J Fract*, 2000, 103: 259~277
- 127 Pan E. A general boundary element analysis of 2-D linear elastic fracture mechanics. *Inter J Fract*, 1997, 88: 41~59
- 128 Wang J L, Crough S L, Mogilevsakya S G. A complex boundary integral method for multiple circular holes in an infinite plate. *Eng Anal Boun Elem*, 2003, 27: 789~802
- 129 Chen Y Z. Multiple semi-infinite crack problems in elastic plane or half-plane. *Int J Fract*, 1985, 27: R55~58
- 130 Chen Y Z. General case of multiple crack problems in an infinite plate. *Eng Fract Mech*, 1984, 20: 591~598
- 131 Chen Y Z. Multiple crack problems for two bonded half-planes in plane and antiplane elasticity. *Eng Fract Mech*, 1986, 25: 1~9
- 132 Chen Y Z, Hasebe N. Properties of eigenfunction expansion form for the rigid line problem in dissimilar media. *Int J Solids Struct*, 1996, 33: 611~628
- 133 Chen Y Z, Hasebe N. Stress-intensity factors for curved circular crack in bonded dissimilar materials. *Theo Appl Fract Mech*, 1992, 17: 189~196
- 134 Han X L, Ellyin F, Xia Z H. Interaction among interface, multiple crack and dislocation. *Int J Solids Struct*, 2002, 39: 1575~1590
- 135 Isida M, Noguhi H. Arbitrary array of cracks in bonded half planes subjected to various loading. *Eng Fract Mech*, 1993, 46: 365~380
- 136 Wang W C, Chen J T. Stress analysis of finite interfacially bimaterial plates by using the variational method. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 1989, 73: 153~171
- 137 Chen Y Z, Hasebe N. Singularity eigenvalue analysis of crack along a wedge-shaped interface. *J Appl Mech*, 1993, 60: 781~783
- 138 Chen Y Z, Hasebe N. Eigenfunction expansion and higher order weight functions of interface cracks. *J Appl Mech*, 1994, 61: 843~849
- 139 Chen Y Z. Solutions of multiple crack problems of elastic half-plane. *J Appl Mech*, 1985, 52: 979~981
- 140 Chen Y Z, Hasebe N. Solution of multiple edge crack problem of elastic half-plane by using singular integral equation approach. *Com Numer Meth Eng*, 1995, 11: 607~617
- 141 Ioakimidis N I, Theocaris P S. A system of curvilinear cracks in an isotropic elastic half-plane. *Int J Fract*, 1979, 15: 299~309
- 142 Chen Y Z. Weaker singular integral equation approach for an oblique edge crack problem of half-plane. *Int J Fract*, 1995, 72: R77~80
- 143 Chen Y Z, Cheung Y K. New integral equation approach for the crack problem in elastic half-plane. *Int J Fract*, 1990, 46: 57~69
- 144 Chen Y Z. Multiple crack problem for an infinite strip. *Eng Fract Mech*, 1991, 40: 9~16
- 145 Chen Y Z. Multiple crack problems for finite plate with arbitrary contour configuration. *Eng Fract Mech*, 1988, 31: 289~295
- 146 Shen D W, Fan T Y. Exact solutions of two semi-infinite collinear cracks in a strip. *Eng Fract Mech*, 2003, 70: 813~822
- 147 Chen Y Z. Reducing crack problem of a circular plate or an infinite plate containing a circular hole into Fredholm integral equation. *Int J Fract*, 1983, 23: R101~104

- 148 Chen Y Z. Solutions of multiple crack problems of a circular plate or an infinite plate containing a circular hole by using Fredholm integral equation. *Int J Fract*, 1984, 25: 155~168
- 149 Chen Y Z, Lin W X. Elementary solutions of multiple crack problems for circular region with fixed boundary. *Int J Fract*, 1985, 28: R79~82
- 150 Lin W X, Chen Y Z. Multiple crack problems inside and outside circular region. *Theo Appl Fract Mech*, 1989, 11: 199~208
- 151 Chen Y Z, Liu H Y. Multiple cracks in pressurized hollow cylinder. *Theo Appl Fract Mech*, 1988, 10: 213~218
- 152 Chen Y Z. Multiple crack problem for a rotating disc. *Acta Mechanica Sinica*, 1985, 17: 577~580 (in Chinese)
- 153 Gross D, Chen Y Z. A new integral equation approach for the curved crack problem in circular plate, In: O Bruller, et al, eds. *Advance in Continuum Mechanics*, Heideberg: Springer, 1991. 267~273
- 154 Theotokoglou E N. Integral equation solution of the eccentrically rotating cracked finite disc. *Eng Fract Mech*, 1992, 41: 299~308
- 155 Xu Y L, Dalale F. Stress intensity factors for an internal or edge crack in a circular disk subjected to concentrated or distributed loads. *Eng Fract Mech*, 1992, 42: 757~787
- 156 Tracy P. Stress intensity factors for multiple edge cracks in rotating disc. *Int J Fract*, 1980, 16: 85~93
- 157 Sekine H, Koizumi R. Stress intensity factors for an embedded crack in a thick walled cylinder subjected to internal pressure. *Int J Fract*, 1982, R3~8
- 158 Fett T. A semi-analytical study of the edge-cracked circular disc by use the boundary collocation method. *Eng Fract Mech*, 1997, 56: 331~346
- 159 Dong S M, Wang Y, Xia Y M. Stress intensity factors for central cracked circular disk subjected to compression. *Eng Fract Mech*, 2004, 71: 1155~1168
- 160 Williams M L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J Appl Mech*, 1957, 24: 109~114
- 161 Rice J R. Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity. *J Mech Phys Solids*, 1974, 22: 17~26
- 162 Betegon C, Hancock J W. Two-parameter characterization of elastic-plastic crack-tip fields. *J Appl Mech*, 1991, 58: 104~110
- 163 Chen Y Z. T stress in multiple crack problem for an infinite plate. *Eng Fract Mech*, 1994, 48: 641~647
- 164 Chen Y Z. Closed form solutions of Tstress in plane elasticity crack problems. *Int J Solids Struc*, 2000, 37: 1629~1637
- 165 Chen Y Z, Lin X Y. Novel weight function approach for evaluating Tstress in plane elasticity crack problem. *Int J Fract*, 1997, 85: L35~40
- 166 Zhao L G, Chen Y H. Tstress of an interface macrocrack induced by near tip subinterface microcracks. *Int J Fract*, 1998, 90: 275~285
- 167 Han J J, Chen Y H. Teffect for the interaction problem of an interface macrocrack with a near microvoid. *Int J Fract*, 1998, 102: 205~222
- 168 Ma H, Zhao L G, Chen Y H. Non-singular terms for multiple crack in anisotropic elastic solids. *Theo Appl Fract Mech*, 1997, 27: 129~134
- 169 Tan C L, Wang X. The use of quarter-point crack-tip elements for Tstress determination in boundary element method analysis. *Eng Fract Mech*, 2003, 70: 2247~2252
- 170 Chen Y Z. Multiple crack problems of antiplane elasticity in an infinite body by using Fredholm integral equation approach. *Eng Fract Mech*, 1985, 21: 473~478
- 171 Chen Y Z, Wang Z X. Solutions of multiple crack problems of circular region with free or fixed boundary condition in antiplane elasticity. *Int J Fract*, 1986, 30: 287~293
- 172 Chen Y Z, Wang Z X. Anti-plane shear of rectangular region with two cracks. *Theo Appl Fract Mech*, 1990, 12: 225~229
- 173 Chen Y Z. Solutions of multiple crack problems of a circular region for antiplane elastic problem or torsion problem by using Fredholm integral equation. *Int J Fract*, 1984, 27: R15~19
- 174 Chen Y Z. Solutions of torsion crack problems of a rectangular bar by harmonic function continuation technique. *Eng Fract Mech*, 1980, 13: 193~212
- 175 Chen Y Z. Multiple crack problem for circular torsion cylinder. *Com Numer Methods Eng*, 1999, 15: 557~563
- 176 Sih G C. Strength of stress singularities at crack tips for flexural and torsional problems. *J Appl Mech*, 1963, 30: 419~425
- 177 Yue J C, Tang R J. Integral equation method for the torsion of a composite cylinder with crack and inclusion. *Eng Fract Mech*, 1996, 55: 763~775
- 178 Li Y L, Hu S Y, Tang R L. The stress intensity of crack-tip and notch-tip in cylinder under torsion. *Int J Eng Sci*, 1995, 33: 447~455
- 179 Chen Y Z. Plane problem of two rows of periodic crack. *Theo Appl Fract Mech*, 1987, 7: 185~188
- 180 Chen Y Z, Lin X Y, Wang Z X. Solution of periodic group crack problems by using the Fredholm integral equation. *Acta Mech*, 2005, 178: 41~51
- 181 Chen Y Z, Lin X Y. Periodic group crack problems in an infinite plate. *Int J Solids Struc*, 2005, 42: 2837~2850
- 182 Delameter W R, Herrmann G, Barnett D M. Weakening of elastic solid by a rectangular array of cracks. *J Appl Mech*, 1975, 42: 74~80
- 183 Isida M, Usijima N, Kishine N. Rectangular plate, strips and wide plates containing internal cracks under various boundary conditions. *Trans Japan Soc Mech Engrs*, 1981, 47: 27~35
- 184 Chen Y Z. An investigation of the stress intensity factor for a finite internally cracked plate by using variational method. *Eng Fract Mech*, 1983, 17: 387~394
- 185 Chen Y Z, Lee K Y. An infinite plate weakened by periodic cracks. *J Appl Mech*, 2002, 69: 552~555
- 186 Karihaloo B L, Wang J. On the solution of doubly periodic array of cracks. *Mech of Mater*, 1997, 26: 209~212
- 187 Wang G S. The interaction of doubly periodic arrays. *Theo Appl Fract Mech*, 2004, 42: 249~294

INTEGRAL EQUATION METHODS FOR MULTIPLE CRACK PROBLEMS AND RELATED TOPICS*

CHEN Yizhou

Division of Engineering Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China

Abstract The content of this review consists of recent developments covering an advanced treatment of multiple crack problems in plane elasticity. Several elementary solutions are highlighted, which are the fundamentals for the formulation of the integral equations. The elementary solutions include those initiated by point sources or by a distributed traction along the crack face. Two kinds of singular integral equations, three kinds of Fredholm integral equations, and one kind of hypersingular integral equation are suggested for the multiple crack problems in plane elasticity. Regularization procedures are also investigated. For the solution of the integral equations, the relevant quadrature rules are addressed. A variety of methods for solving the multiple crack problems is introduced. Applications for the solution of the multiple crack problems are also addressed. The concept of the modified complex potential (MCP) is emphasized, which will extend the solution range, for example, from the multiple crack problem in an infinite plate to that in a circular plate. Many multiple crack problems are addressed. Those problems include: (i) multiple semi-infinite crack problem, (ii) multiple crack problem with a general loading, (iii) multiple crack problem for the bonded half-planes, (iv) multiple crack problem for a finite region, (v) multiple crack problem for a circular region, (vi) multiple crack problem in antiplane elasticity, (vii) T-stress in the multiple crack problem, and (viii) periodic crack problem and many others. This review article cites 187 references.

Keywords multiple crack problem, integral equation plane elasticity

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272053)

† E-mail: chens@ujs.edu.cn