

文章编号:1000-1301(2004)01- 0007- 08

SH 波在浅埋多个圆孔处的散射与地震动

姜 艳¹,黄荣富²,刘殿魁³,王国庆³

(1. 黑龙江水利专科学校,哈尔滨 150086; 2. 中地集团道桥公司,黑龙江 哈尔滨 150030;

3. 哈尔滨工程大学建筑工程学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:研究了以任意方向入射的平面 SH 波在浅埋多个圆孔处的散射与地震动问题。利用 SH 散射的对称性和多极坐标方法构造了问题的位移解。当入射波的波长与圆孔的半径相比较小时,地震动将受到较大的影响。影响地震动有三个主要参数:(1) SH 波的入射角 α_0 ;(2) 入射波波数 η ,即圆形孔洞的半径与入射波半波长之比;(3) 诸圆孔的埋置情况,诸孔的埋深 h_i/a_i 、孔心距 D_i/a_i ,即圆形孔洞至表面距离与圆半径之比和圆形孔洞中心的距离与半径之比。当 η 较大时,地震动幅值变化激烈,位移幅值可出现跳动和放大的现象。当诸圆孔的最小埋深量 h_i/a_i 和孔心距 D_i/a_i 超过 10 - 12 时,位移幅值恢复至半空间单一圆孔散射的情况,表明圆形孔洞的影响可被忽略。

关键词:SH 波散射;地震动;浅埋多个圆孔;多极坐标

中图分类号:P315. 96

文献标识码:A

Scattering of SH wave by shallow fill multiple circular cavities and the ground motion

JIANG Yan, HUANG Rong-fu, LIU Dian-kui, WANG Guo-qing

(1. Heilongjiang Hydraulic Engineering College, Harbin 150086, China; 2. Zhongdi Group Road and Bridge Co. of Heilongjiang Prov., Harbin 150030, China; 3. School of Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: The problem of scattering of SH-waves by shallow fill multiple circular cavities and the ground motion is investigated for arbitrary incident angle in this paper. The displacement solution is constructed by applying the symmetry of scattering of SH-wave and the method of multi-polar coordinate system. When wavelength of the incident wave is smaller than the radius of the circular cavities, the ground motion will be influenced greatly. There are three main factors that influence the ground motion. The first one is incident angle α_0 and the second one is incident wave number η , i. e. the ratio of radius of the circular cavities to the half wavelength of incident wave. And the last one is h_i/a_i and D_i/a_i , those are the ratio of the distance of center of the circular cavities from the horizontal interface and the distance between the centers to the radius of the circular cavities respectively. When η is larger, the amplitude of the ground motion varies fiercely and sometimes will leap and enlarge sharply. If the value of h_i/a_i increases to 10~12, and the value of D_i/a_i increases to 10, the amplitude of displacement approaches to that of the half space with single cavity, which shows that the influence of circular cavity can be ignored.

Key words: scattering of SH-waves; ground motion; shallow fill multiple circular cavities; multi-polar coordinate

1 引言

对强震时的地震加速度记录进行分析,是地震工程学研究的重要问题之一。强震记录又与震源的类型、

收稿日期:2003 - 10 - 20; 修回日期:2004 - 02 - 03

基金项目:国家自然科学基金资助项目(59578003)

作者简介:姜艳(1966 -),女,副教授,主要从事工程力学教学与研究。

地震波传播的路径、局部的地质条件以及地面的几何形状有重要的关系。这些因素最终都将反映到记录中去,而影响到对其进行的分析和工程应用^[1-4]。

近 20 多年来,在地面几何形状对地震动影响的研究工作中,已经积累了一定数量的研究成果,研究了凹陷和凸起地形以及一些复杂地形对地震动的影响。这些成果不但促进了强震记录研究与分析工作,而且也扩大了地震科学中关于大陆边缘上的表面波和不规则表面反射等方面的研究工作^[1,2,4]。

本文研究在地震波传播过程中,当其接近地表面时,平面 SH 型地震波对多个相邻圆形孔洞的散射问题,并确定其对地震动的影响。若将这一浅埋相邻多个圆形孔洞视为“隐蔽地形”,则问题可与凹陷、凸起地形研究归于一类,也属于地形影响范畴。“隐蔽地形”的研究是一个具有理论意义和应用前景的研究工作。文献[5-6]给出了一些研究成果。本文利用复变函数和多极坐标的方法,求解了浅埋相邻多个圆孔对 SH 波散射和地震动问题,并利用 SH 波散射的对称性,构造了满足半空间界面上应力自由的位移解,将半空间中的散射问题“开拓”成为一个全空间的问题,并按全空间问题求解程序最终给出解答。本文在理论上定量地说明了相邻多个圆孔,即隐藏“多个圆孔地形”对地震动影响的一般规律,为深入研究地面运动提供了参考资料。

2 控制方程

图 1 为所研究的平面 SH 波对于浅埋相邻多个圆形孔洞散射的计算模型。 c_s 为第 s 个圆孔的中心坐标,而其半径和边界分别用 a_s 和 T_s 表示。

2.1 运动方程

在各向同性、均匀连续的弹性介质中研究弹性波对孔洞的散射问题,其最为简单的模型就是反平面剪切运动的 SH 波模型。在 xy 平面内,SH 波所表示的位移 $W(x,y,t)$ 垂直于 xy 平面,且与 z 轴无关。对于稳态情况,位移 $W(x,y,t)$ 要满足运动方程

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k^2 W = 0 \tag{1}$$

其中, w 为位移函数,位移函数与时间的依赖关系为 $e^{i\omega t}$ (以下讨论略去谐和因子 $e^{i\omega t}$)。 $k = \omega c_s$, ω 为位移 $W(x,y,t)$ 的圆频率; $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ 为剪切波的波速; ρ, μ 为弹性介质的质量密度和剪切模量。在复平面极坐标系中其运动方程和应力与应变关系为:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 W = 0 \tag{2}$$

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{i\theta} \right), \tau_{\theta z} = i\mu \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\theta} - \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{i\theta} \right) \tag{3}$$

2.2 半空间中浅埋相邻多个圆孔的散射波

如图 1,对浅埋相邻多个圆形孔洞的散射波 $w^{(s)}$,要求它除满足方程(1)和无穷远处的 Sommerfeld 辐射条件之外,还要求它能满足半空间的自由表面上的应力自由条件。这样既可将半空间的问题转换成为一个全空间的问题。按全空间中求解相邻多个圆孔程序完成满足相邻多个圆孔的周边条件,以得到问题的解答。利用 SH 波散射问题所具有的对称性和复变函数中的多极坐标方法,即可完成 $w^{(s)}$ 的构造。

在复平面 $(z, \bar{z})$ 上,满足半空间自由面上的应力自由这一条件的散射波 $w^{(s)}$ 可以写成

$$W^{(s)}(z, \bar{z}) = \sum_{s=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}^s A_n \left\{ H_n^{(1)}(k|z - c_s|) \left[\frac{z - c_s}{|z - c_s|} \right]^n + H_n^{(1)}(k|z - \bar{c}_s|) \left[\frac{z - \bar{c}_s}{|z - \bar{c}_s|} \right]^{-n} \right\} \tag{4}$$

其中, $\bar{c}_s$ 为 T_s 中心 c_s 的共轭, ${}^s A_n (s = 1, 2, \cdots, K)$ 为待定系数, K 为半空间中圆孔的数目, $H_n^{(1)}$ 为 n 阶第一类 Hankel 函数。

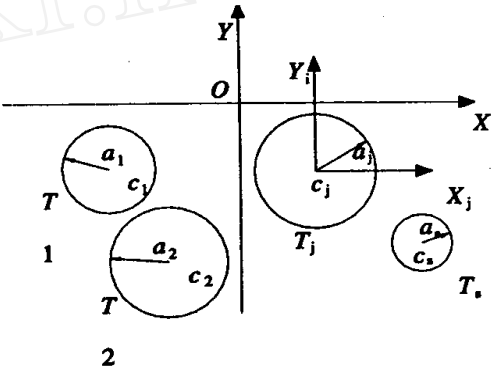


图 1 SH 波对浅埋相邻多个圆形结构
散射计算模型

当移动坐标后,即把坐标原点移动到 j 孔的圆心 c_j 上时,式(4)可写成

$$W^{(s)}(z_j, \bar{z}_j) = \sum_{s=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left\{ H_n^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j}{|z_j - {}^s d_j|} \right]^n + H_n^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j' |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j'}{|z_j - {}^s d_j'|} \right]^{-n} \right\} \quad (5)$$

而在复平面 $(z_j, \bar{z}_j)$ 上,散射应力为

$$\tau_{rz}^{(s)} = \frac{\mu k}{2} \sum_{s=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left\{ \left[H_{n-1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j}{|z_j - {}^s d_j|} \right]^{n-1} - H_{n+1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j' |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j'}{|z_j - {}^s d_j'|} \right]^{-(n+1)} \right] \cdot e^{i\theta_j} \right. \\ \left. - \left[H_{n+1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j}{|z_j - {}^s d_j|} \right]^{n+1} - H_{n-1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j' |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j'}{|z_j - {}^s d_j'|} \right]^{-(n-1)} \right] \cdot e^{i\theta_j} \right\} \quad (6)$$

$$\tau_{\theta_z}^{(s)} = \frac{i\mu k}{2} \sum_{s=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left\{ \left[H_{n-1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j}{|z_j - {}^s d_j|} \right]^{n-1} - H_{n+1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j' |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j'}{|z_j - {}^s d_j'|} \right]^{-(n+1)} \right] \cdot e^{i\theta_j} \right. \\ \left. + \left[H_{n+1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j}{|z_j - {}^s d_j|} \right]^{n+1} - H_{n-1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j' |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j'}{|z_j - {}^s d_j'|} \right]^{-(n-1)} \right] \cdot e^{i\theta_j} \right\} \quad (7)$$

3 问题的解答

3.1 入射波和反射波

在一个完整的弹性半空间中,有一个稳态的 SH 波 $W^{(i)}$ 入射波时,就会在界面上产生一个反射 SH 波 $W^{(r)}$ 。它们在复平面 $(z_j, \bar{z}_j)$ 上可以写成

$$W^{(i)} = W_0 e^{i\frac{k}{2}(z_j - c_j) \cdot e^{-ia_0} + (\bar{z}_j - \bar{c}_j) \cdot e^{ia_0}}; \quad W^{(r)} = W_0 e^{i\frac{k}{2}(z_j - c_j) \cdot e^{-ia_0} + (\bar{z}_j - \bar{c}_j) \cdot e^{ia_0}}; \quad (8)$$

其中, W_0 为入射波的波幅, a_0 为入射角。

在极坐标系中 $W^{(i)}$ 、 $W^{(r)}$ 所产生的应力为

$$\tau_{rz}^{(i)} = i\tau_0 \cos(\theta_j - \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z_j - c_j) \cdot e^{-ia_0} + (\bar{z}_j - \bar{c}_j) \cdot e^{ia_0}]}; \quad \tau_{\theta_z}^{(i)} = i\tau_0 \cos(\theta_j - \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z_j - c_j) \cdot e^{-ia_0} + (\bar{z}_j - \bar{c}_j) \cdot e^{ia_0}]}; \\ \tau_{rz}^{(r)} = i\tau_0 \cos(\theta_j + \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z_j - c_j) \cdot e^{-ia_0} + (\bar{z}_j - \bar{c}_j) \cdot e^{ia_0}]}; \quad \tau_{\theta_z}^{(r)} = i\tau_0 \cos(\theta_j + \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z_j - c_j) \cdot e^{-ia_0} + (\bar{z}_j - \bar{c}_j) \cdot e^{ia_0}]};$$

其中, $\tau_0 = \mu k W_0$, 为入射应力的最大幅值。

3.2 问题的解答

如图 1 所示,在弹性半空间中界面附近相邻多个圆孔的散射问题中,若入射波、反射波和散射波写成式(8)和式(5),则半空间界面上应力自由的边界条件会自动满足。而在复平面 $(z_j, \bar{z}_j)$ 上,圆形孔洞周边上应力要满足自由的边界条件,在 T_j 上,即在 $|z_j| = a_j$ 上,有

$$\tau_{rz}^{(i)} = \tau_{rz}^{(r)} + \tau_{rz}^{(s)} + \tau(s)_{rz} \quad |z_j| = a_j, j = 1, 2, \dots, K \quad (9)$$

将得到的应力表达式代入式(9),则有

$$\sum_{s=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n {}^s \zeta_{jn} = \zeta_j \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (10)$$

其中

$$\zeta_{jn} = \frac{\mu k}{2} \left\{ \left[H_{n-1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j}{|z_j - {}^s d_j|} \right]^{n-1} - H_{n+1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j' |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j'}{|z_j - {}^s d_j'|} \right]^{-(n+1)} \right] \cdot e^{i\theta_j} \right. \\ \left. - \left[H_{n+1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j}{|z_j - {}^s d_j|} \right]^{n+1} - H_{n-1}^{(1)}(k | z_j - {}^s d_j' |) \left[\frac{z_j - {}^s d_j'}{|z_j - {}^s d_j'|} \right]^{-(n-1)} \right] \cdot e^{i\theta_j} \right\} \\ \zeta_j = -i\tau_0 \cos(\theta_j - \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z_j - c_j) \cdot e^{-ia_0} + (\bar{z}_j - \bar{c}_j) \cdot e^{ia_0}]} - i\tau_0 \cos(\theta_j + \alpha_0) e^{i\frac{k}{2}[(z_j - c_j) \cdot e^{-ia_0} + (\bar{z}_j - \bar{c}_j) \cdot e^{ia_0}]}$$

用 $e^{im\theta_j}$ 乘方程(10),并在区间 $(-\pi, \pi)$ 上积分,则有

$$\sum_{s=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^s \zeta_{jn,m} = \zeta_{j,m} \quad j = 1, 2, \dots, K$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

$$\zeta_{jn,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_{jn} e^{-im\theta} d\theta; \quad \zeta_{j,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_j e^{-im\theta} d\theta$$

方程式(11)即为决定未知系数 A_n^s 的无穷代数方程组。

3.3 地面位移幅值

研究浅埋相邻多个圆形孔洞处 SH 波散射对地震动的影响,就要求给出水平面上任一观察点上地震动变化与 SH 波的波数和入射角 α_0 的关系。对稳态 SH 波而言,如果求得了观察点处的位移量,即可求出该点的加速度值,这对地震工程是至关重要的。

由于入射 SH 波的作用,半空间中的总波场可以写成

$$W^{(t)} = W^{(i)} + W^{(r)} + W^{(s)} \text{ 或 } W^{(t)} = |W^{(t)}| e^{i(\omega t - \phi)} \quad (12)$$

其中, $|W^{(t)}|$ 为位移幅值,即 $W^{(t)}$ 的绝对值;而 ϕ 为 $W^{(t)}$ 的相位,同时有

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\operatorname{Im} W^{(t)}}{\operatorname{Re} W^{(t)}} \right] \quad (13)$$

又入射波的频率 ω 可与圆形孔洞的半径 a_j 组合成为一个入射波波数,即入射波波数为

$$ka_j = \omega a_j / c_s \text{ 或 } ka_j = 2\pi a_j / \lambda \quad (14)$$

其中 λ 为入射波的波长,可写成

$$\eta_j = 2a_j / \lambda \quad (15)$$

4 算例与结果分析

对如图 2 所示的具有相同半径,且具有同一埋深相邻二圆孔对 SH 波散射与地震动问题进行分析。

图 3~图 6 给出了具有不同波数 η ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$) 的 SH 波,以不同入射角 α 入射时对不同埋深 h/a 和不同孔心距 D/a 之二圆形孔洞的散射及水平面上位移幅值 $|W^{(t)}|$ 及其相位 ϕ 的变化,其中 a 为孔的半径。 x 是以第一个圆孔中心在水平面上的投影位置为原点的横坐标,即当 $x/a = 0$ 和 $x/a = \pm 1$ 分别对应于 T_1 圆形孔洞中心和孔洞边缘在水平面上的投影位置, $|x/a| < 1$ 和 $|x/a| > 1$ 则分别代表圆形孔洞内部及其外部诸点在水平界面上的投影位置。

(1) 图 3 给出了 $\eta = 0.1, 0.25, 0.75, 1.25$ 和 $h/a = 1.5, D/a = 2.5$ 时,SH 波以不同入射角 α_0 入射时,在水平面上位移幅值 $|W^{(t)}|$ 和相位 ϕ 的变化。 $\eta = 0.1$ 相当于低频、准静态情况,圆孔 1 左边的位移幅值 $|W^{(t)}|$ 有所提高,大约可达 2.9 左右,与无孔时地表位移量 2.0 相比,提高了 45%,比单孔散射时也提高了约 10%,而地面右边的位移幅值 $|W^{(t)}|$ 变化不大。当 $\eta = 0.25, 0.75, 1.25$ 时,地面位移幅值与无孔时的位移幅值相比,大约都会增加,最大值可以超过 5.0 (当 $\eta = 1.25$ 时)。当 $\eta = 0.1$ 时,以小入射角入射时,在圆孔 1 的正上方位移幅值 $|W^{(t)}|$ 很小,例如 $\alpha_0 = 0^\circ$ 时, $|W^{(t)}| \approx 0.3$,这相当于出现了“波节”。

(2) 图 4 给出了 $\eta = 0.1, 0.25, 0.75, 1.25$ 和 $h/a = 1.5, D/a = 6.0$ 时,SH 波以不同入射角 α_0 入射时, $|W^{(t)}|$ 和 ϕ 的变化。当 $\eta = 0.1$ 时, $|W^{(t)}|$ 最大值出现在两空心的中点附近,当 $\eta = 0.25$ 时,最大值出现在两空的上方,“波节”移到了两孔心中点对应的水平面上,这说明两孔的相互影响是非常明显的。

(3) 如图 5 所示,埋深 $h/a = 15.0$ 时,地面位移幅值 $|W^{(t)}|$ 的变化平稳,与无孔时的情况差别不大,这说明当埋深 $h/a > 15.0$ 时,该问题可按深埋处理。

(4) 如图 6,非常明显,两孔中心距离 D/a 的影响是很强烈的,当 $D/a = 200$ 时,表面位移才会接近浅埋单个圆孔时 SH 波散射的情况^[14]。

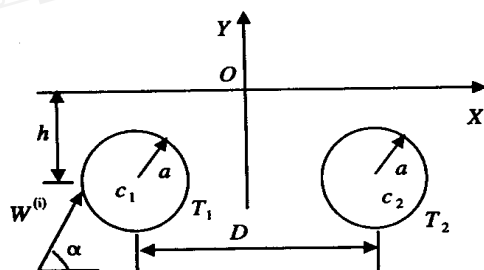


图 2 SH 波对两个浅埋圆孔入射计算模型

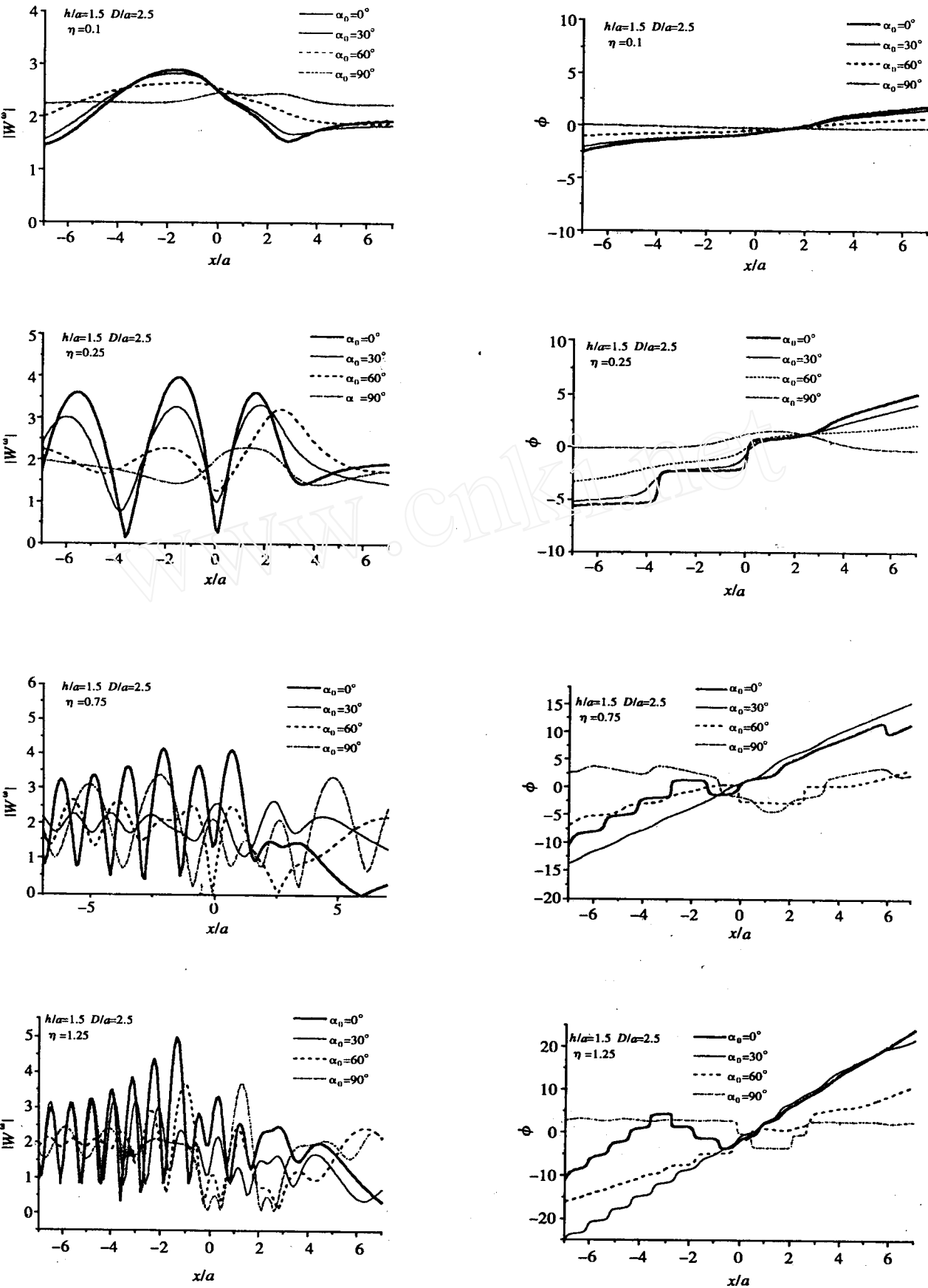
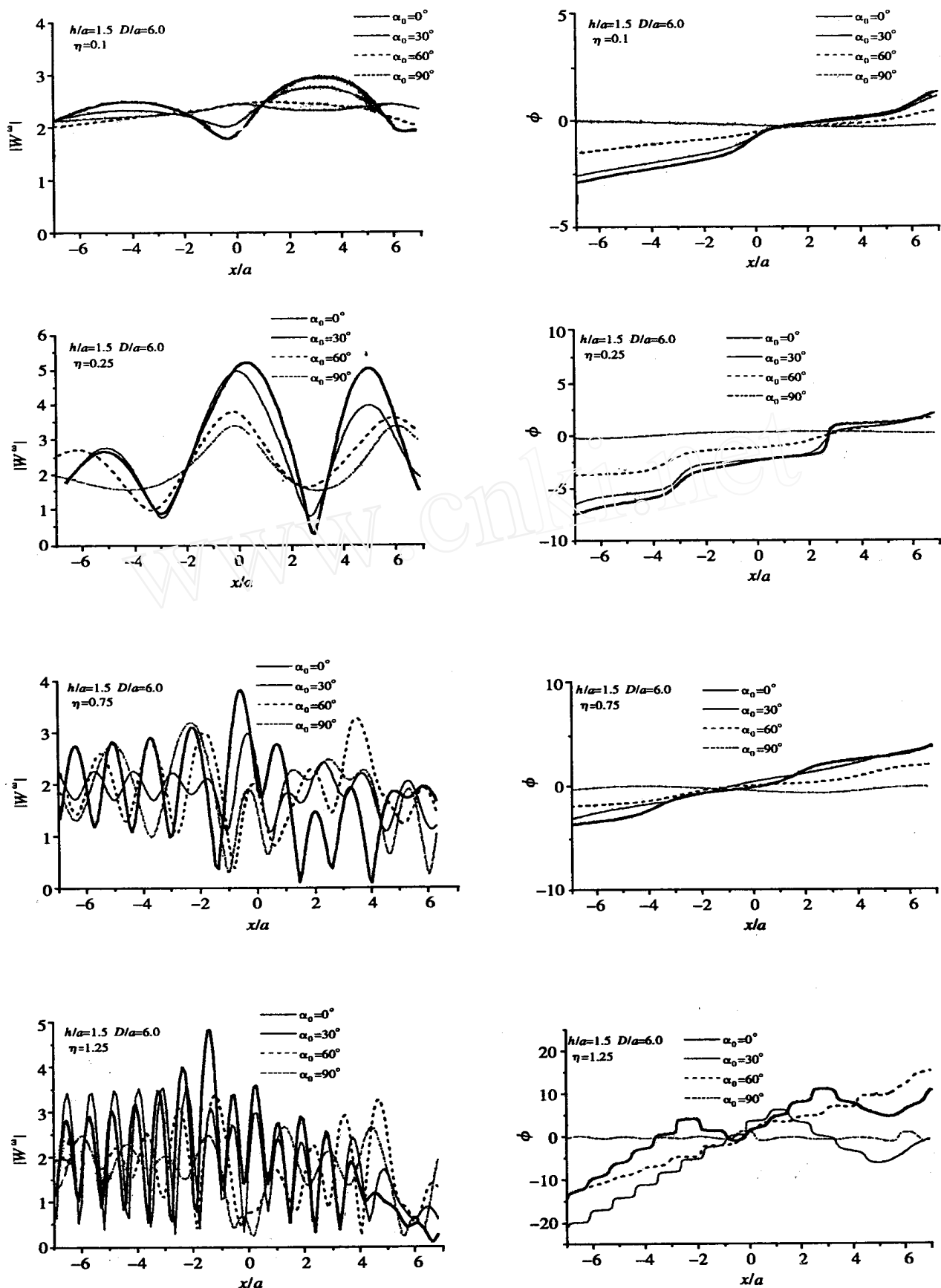


图3 水平地面的位移幅值 $|w^{(0)}|$ 与相位角 ϕ 随 x/a 的变化

图4 水平地面的位移幅值 $|w^{(0)}|$ 与相位角 ϕ 随 x/a 的变化

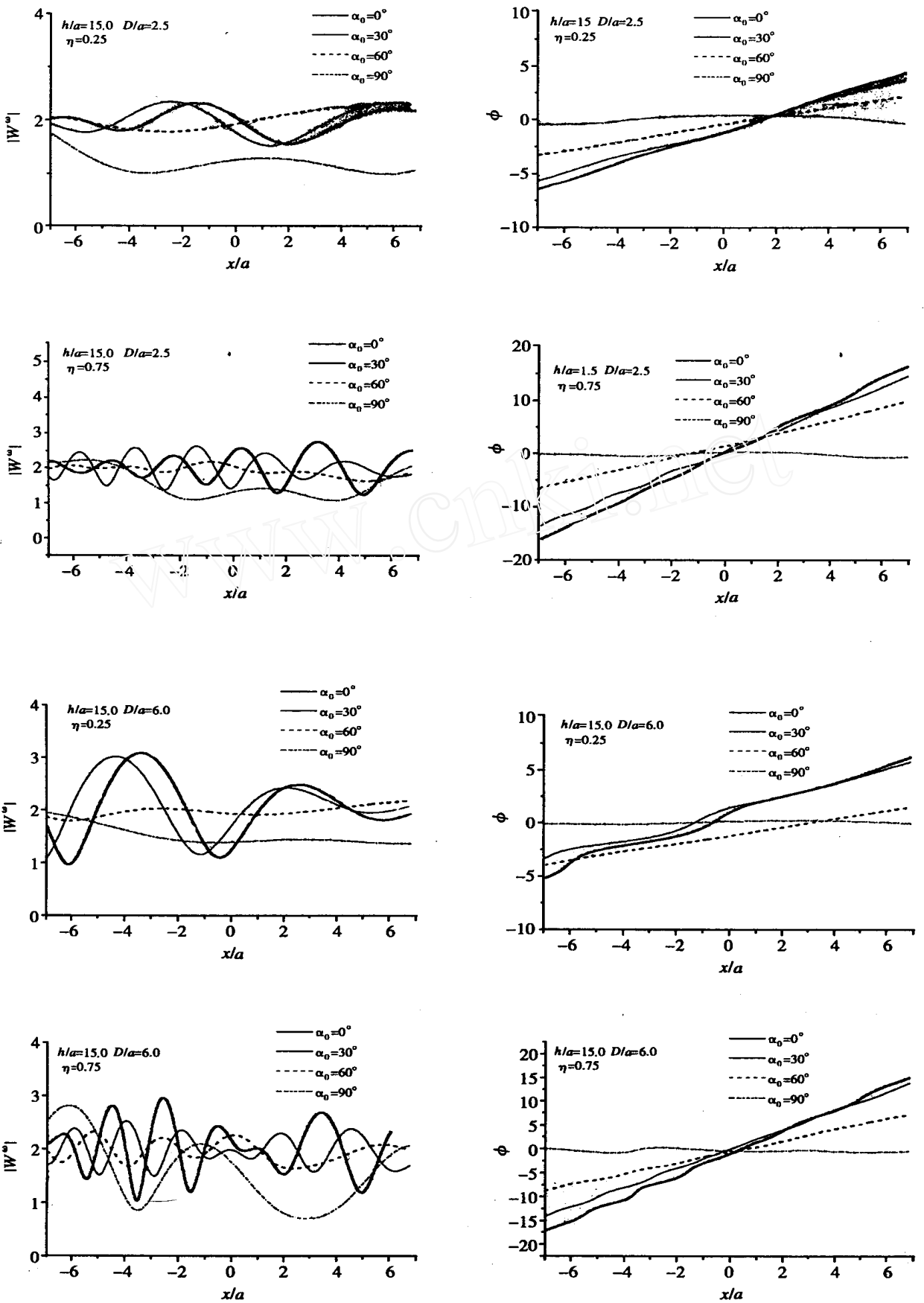


图5 水平地表的位移幅值 $|w^{(0)}|$ 与相位角 ϕ 随 x/a 的变化

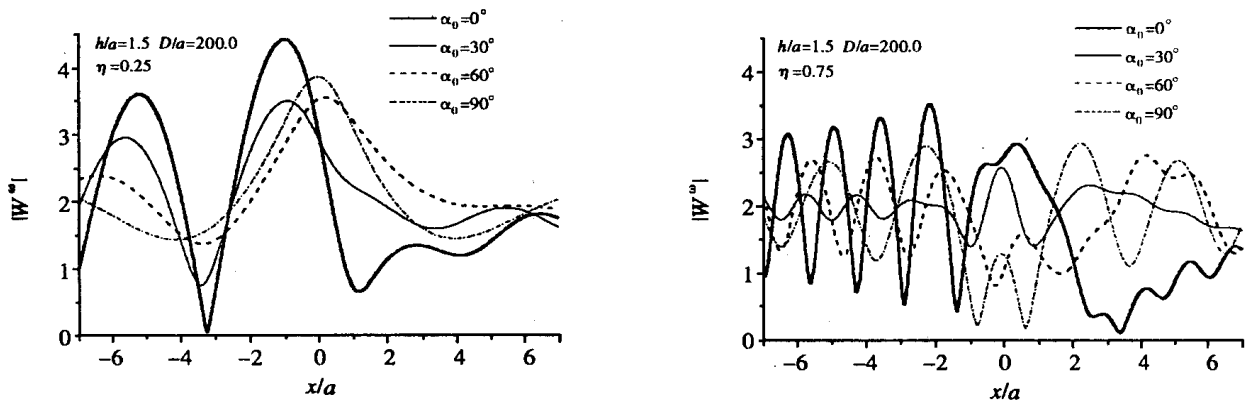


图6 水平地表面的位移幅值 $|w^{(t)}|$ 随 x/a 的变化

参考文献:

- [1] 廖振鹏. 工程波动理论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1996
- [2] 胡聿贤. 地震工程学[M]. 北京: 地震出版社, 1998
- [3] 胡聿贤, 周锡元. 地震工程跨世纪发展趋势[J]. 工程抗震, 1999(1): 3 - 9
- [4] M. D. Trifunac. Scattering of Plane SH - waves by a Semi - Cylindrical Canyon[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1973(1): 267 - 281
- [5] V. W. Lee, M. E. Manogian. Surface Motion above an Arbitrary Shape Underground Cavity for Incident SH Wave[J]. European Earthquake Engineering 1995, 8(1): 3 - 11
- [6] V. W. Lee, S. Chen and I. R. Hsu. Antiplane Diffraction from Canyon Above Subsurface Unlined Tunnel[J]. ASCE Eng. Mech. Div. 1999