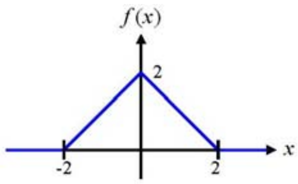
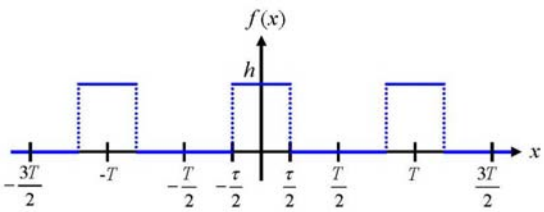
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2026 工程數學(二) 第二次大考參考解答

系級：____________ 學號：____________ 姓名：____________

1. 試判定下列函數那些是奇函數，那些是偶函數，那些是非奇非偶函數? (12%)
（請說明判斷理由，無說明者不給分）
   (1) $f(x)=\sin^3 x+1$ (2) $f(x)=x\sin^3 x+1$
   (3) $f(x)=\cos^3 x+1$ (4) $f(x)=x\cos^3 x+1$
2. 試求函數 $f(x)=\cos^3 2x+\sin^5 x$ 的傅立葉級數展開。 (8%)
3. 給一週期函數 $f(x)=x^2$, $-1<x<1$ 且 $f(x)=f(x+2)$, 試求:
   (1) 此函數之傅立葉級數展開。 (6%) (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=?$ (4%)
   (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=?$ (4%) (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=?$ (4%) (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=?$ (4%)
4. 給一函數如下圖所示



   (1) 試求 $f(x)$ 的傅立葉積分表示式。(7%)
   (2) 試問 $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (3%)
5. 把寬為 τ，高為 h，週期為 T 的矩形波(如下圖)展開成複數形式傅立葉級數。 (10%)



6. 若 $f(t)=\begin{cases}1, 0\le t\le\pi\\0, t<0 \text{ and } t>\pi\end{cases}$ 且 $g(t)=\begin{cases}\sin t, 0\le t\le\pi\\0, t<0 \text{ and } t>\pi\end{cases}$
   (1) 試問其傅立葉轉換 $F(\omega)$ 與 $G(\omega)$ 為何? (10%)
   (2) 若 $p(t)=g(t-\pi)$, 則其傅立葉轉換 $P(\omega)=?$ (4%)
   (3) 若 $q(t)=\frac{dg(t)}{dt}$, 則其傅立葉轉換 $Q(\omega)=?$ (4%)
   (4) $h(t)=f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau=?$ (5%)
   (hint: 請將 t 分成 $t<0$, $0\le t\le\pi$, $\pi\le t\le 2\pi$ 與 $t>2\pi$ 討論)
   (5) $H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt=?$ (5%)

7. 已知函數 $f(x)=e^{-a|x|}$ 且 $a>0$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{2a}{\omega^2+a^2}$，試求函數 $\dfrac{6e^{i\omega}\cos(4\omega)}{9+\omega^2}$ 的傅立葉逆轉換為何? (10%)

傅立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傅立葉積分： $f(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$

其中 $A(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$, $B(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x},\quad 其中\ \omega_n=\frac{2n\pi}{T},\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$$

傅立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$

Convolution : $f*g=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad\Rightarrow \mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\dfrac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

$\displaystyle\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式: $e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x \quad\Rightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ 與 $\sin x=\dfrac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F(\dfrac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$

參考解答:

1. 試判定下列函數那些是奇函數，那些是偶函數，那些是非奇非偶函數？(12%)
（請說明判斷理由，無說明者不給分）

(1) $f(x)=\sin^3 x+1$ (2) $f(x)=x\sin^3 x+1$

(3) $f(x)=\cos^3 x+1$ (4) $f(x)=x\cos^3 x+1$

偶函數： $f(x)=f(-x)$， 奇函數： $f(x)=-f(-x)$

(1) $f(-x)=\sin^3(-x)+1=-\sin^3 x+1$

$\because$ 等號右式不等於 $f(x)$，也不等於 $-f(x)$

$\therefore$ 此為非奇非偶函數

(2) $f(-x)=(-x)\sin^3(-x)+1=x\sin^3 x+1=f(x)$

$\therefore$ 此為偶函數

(3) $f(-x)=\cos^3(-x)+1=\cos^3 x+1=f(x)$

$\therefore$ 此為偶函數

(4) $f(-x)=(-x)\cos^3(-x)+1=-x\cos^3 x+1$

$\because$ 等號右式不等於 $f(x)$，也不等於 $-f(x)$

$\therefore$ 此為非奇非偶函數

2. 試求函數 $f(x)=\cos^3 2x+\sin^5 x$ 的傅立葉級數展開。

由尤拉公式可知:

$$\cos 2x=\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2} \quad \Rightarrow \cos^3 2x=(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2})^3$$

$$=\frac{1}{8}(e^{i6x}+3e^{i2x}+3e^{-i2x}+e^{-i6x})$$

$$=\frac{1}{4}\cos 6x+\frac{3}{4}\cos 2x$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \quad \Rightarrow \sin^5 x=(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^5$$

$$=\frac{1}{32i}(e^{i5x}-5e^{i3x}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-i3x}-e^{-i5x})$$

$$=\frac{1}{16}\sin 5x-\frac{5}{16}\sin 3x+\frac{5}{8}\sin x$$

$$\therefore \quad f(x)=\cos^3 2x+\sin^5 x=\frac{1}{4}\cos 6x+\frac{3}{4}\cos 2x+\frac{1}{16}\sin 5x-\frac{5}{16}\sin 3x+\frac{5}{8}\sin x$$

3. 給一週期函數 $f(x)=x^2$，$-1<x<1$ 且 $f(x)=f(x+2)$

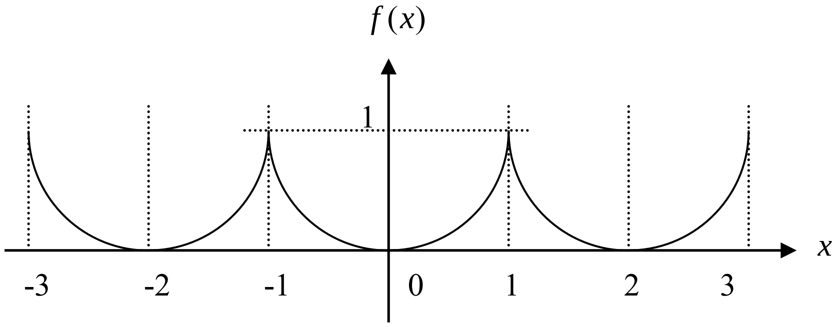
(1) 試求其傳立葉級數展開。 (6%)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=?$ (4%)

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=?$ (4%)

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=?$ (4%)

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=?$ (4%)



(1) $$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\quad (\text{已知 } T=2,\ b_n=0)$$

$$\Rightarrow f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos n\pi x\,dx=\int_{-1}^{1}x^2\cos n\pi x\,dx=\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$=\left(\frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{2x}{n^2\pi^2}\cos n\pi x-\frac{2}{n^3\pi^3}\sin n\pi x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$$

(2) $$f(1)=1^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

(3) $$f(0)=0^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\quad\ldots\ldots(1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12} \quad ......(2)$$

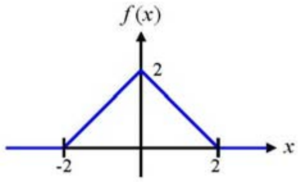
(1)+(2) 可得 $2(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots)=\frac{\pi^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

(5) 應用 Parseval 定理: $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

可得 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,dx=\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

4. 給一函數如下圖所示



(1) 試求 $f(x)$ 的傅立葉積分表示式。(7%)

(2) 試問: $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (3%)

(1) 由圖可知此為偶函數

$$\therefore \quad f(t)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega t\,d\omega \qquad (B(\omega)=0)$$

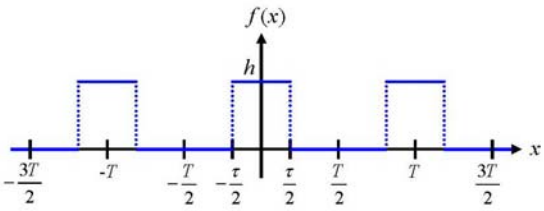
$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{2}(2-t)\cos\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos 2\omega)$$

$$\therefore \quad f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos 2\omega)\cos\omega t}{\omega^2}d\omega$$

(2) $f(0)=2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2\omega}{\omega^2}d\omega \quad \Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2\omega}{\omega^2}d\omega=\pi$

5. 把寬為τ，高為 h，週期為 T 的矩形波(如下圖)展開成複數形式傳立葉級數。 (10%)



由圖可知在一個週期$[-T/2, T/2]$內，函數的表示為 $f(x)=\begin{cases} 0, & -\dfrac{T}{2}\le x<-\dfrac{\tau}{2} \\ h, & -\dfrac{\tau}{2}\le x<-\dfrac{\tau}{2} \\ 0, & \dfrac{\tau}{2}\le x<\dfrac{T}{2} \end{cases}$

函數 $f(x)$ 的複數形式傳立葉級數為 $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$ 且 $\omega_n=\dfrac{2n\pi}{T}$

$$\therefore\ c_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} h\,dx=\frac{h\tau}{T}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} he^{-i\frac{2n\pi}{T}x}\,dx=\frac{h}{T}\left(-\frac{T}{2n\pi i}e^{-i\frac{2n\pi}{T}x}\right)\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$=-\frac{h}{2n\pi i}\left(e^{-i\frac{n\pi\tau}{T}}-e^{i\frac{n\pi\tau}{T}}\right)$$

$$=\frac{h}{n\pi}\sin\frac{n\pi\tau}{T}\quad (n=\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}=\frac{h\tau}{T}+\frac{h}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\tau}{T}e^{i\frac{2n\pi}{T}x}$$

6. 若 $f(t)=\begin{cases}1, 0\le t\le \pi \\ 0, t<0 \text{ and } t>\pi\end{cases}$ 且 $g(t)=\begin{cases}\sin t, 0\le t\le \pi \\ 0, t<0 \text{ and } t>\pi\end{cases}$

(1) 試問其傅立葉轉換 $F(\omega)$ 與 $G(\omega)$ 為何? (8%)

(2) 若 $p(t)=g(t-\pi)$, 則其傅立葉轉換 $P(\omega)=$? (4%)

(3) 若 $q(t)=\dfrac{dg(t)}{dt}$, 則其傅立葉轉換 $Q(\omega)=$? (4%)

(4) $h(t)=f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau=$? (5%)

(hint: 請將 t 分成 $t<0$, $0\le t\le \pi$, $\pi\le t\le 2\pi$ 與 $t>2\pi$ 討論)

(5) $H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt=$? (5%)

(1) $F(\omega)=\int_0^{\pi} 1\cdot e^{-i\omega t}dt=-\dfrac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_0^{\pi}=\dfrac{i}{\omega}(e^{-i\omega\pi}-1)$

$$G(\omega)=\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-i\omega t}dt$$

$$=-\frac{1}{i\omega}\sin t\cdot e^{-i\omega t}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{i^2\omega^2}\cos t\cdot e^{-i\omega t}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{i^2\omega^2}\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-i\omega t}dt$$

$$\Rightarrow (1-\frac{1}{\omega^2})\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-i\omega t}dt=-\frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega\pi}+1)$$

$$\Rightarrow G(\omega)=\int_0^{\pi}\sin t\cdot e^{-i\omega t}dt=\frac{-\frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega\pi}+1)}{(1-\frac{1}{\omega^2})}=\frac{e^{-i\omega\pi}+1}{1-\omega^2}$$

(2) 由 time-shifting 定理:

$$P(\omega)=\mathcal{F}[p(t)]=\mathcal{F}[g(t-\pi)]=e^{-i\omega\pi}G(\omega)=\frac{e^{-2i\omega\pi}+e^{-i\omega\pi}}{1-\omega^2}$$

或者由直接作傅立葉轉換亦可得

$$P(\omega)=\int_{\pi}^{2\pi}\sin(t-\pi)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{i}{\omega}\sin(t-\pi)\cdot e^{-i\omega t}\Big|_{\pi}^{2\pi}+\frac{1}{\omega^2}\cos(t-\pi)\cdot e^{-i\omega t}\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$+\frac{1}{\omega^2}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(t-\pi)\cdot e^{-i\omega t}dt$$

$$\Rightarrow P(\omega)=\int_{\pi}^{2\pi}\sin(t-\pi)e^{-i\omega t}dt=\frac{e^{-2i\omega\pi}+e^{-i\omega\pi}}{1-\omega^2}$$

(3) 由傅立葉微分公式可知:

$$Q(\omega)=\mathcal{F}[g'(t)]=i\omega G(\omega)=\frac{i\omega(e^{-i\omega\pi}+1)}{1-\omega^2}$$

(4) $h(t)=f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

(i) $t<0 \quad \Rightarrow h(t)=0$

(ii) $0\le t\le \pi \quad \Rightarrow h(t)=\int_0^t \sin(t-\tau)d\tau = 1-\cos t$

(iii) $\pi \le t\le 2\pi \quad \Rightarrow h(t)=\int_{t-\pi}^{\pi} \sin(t-\tau)d\tau = 1-\cos t$

(iv) $t>2\pi \quad \Rightarrow h(t)=0$

(5) $H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt = \mathcal{F}[f(t)*g(t)] = F(\omega)G(\omega)$

$$=\frac{i}{\omega}(e^{-i\omega\pi}-1)\cdot\frac{e^{-i\omega\pi}+1}{1-\omega^2}=\frac{i(e^{-2i\omega\pi}-1)}{\omega-\omega^3}=\frac{-i(e^{-2i\omega\pi}-1)}{\omega^3-\omega}$$

或者亦可由 $H(\omega)=\mathcal{F}[h(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt$

$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_0^{2\pi}-\frac{\frac{1}{-i\omega}\cos t\cdot e^{-i\omega t}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{i^2\omega^2}\sin t\cdot e^{-i\omega t}\Big|_0^{2\pi}}{1-\frac{1}{\omega^2}}$$

$$=\frac{i}{\omega}(e^{-i2\pi\omega}-1)-\frac{i\omega(e^{-i2\omega\pi}-1)}{\omega^2-1}$$

$$=\frac{i(\omega^2-1)(e^{-i2\pi\omega}-1)-i\omega^2(e^{-i2\omega\pi}-1)}{\omega^3-\omega}$$

$$=\frac{-i(e^{-i2\pi\omega}-1)}{\omega^3-\omega}$$

7. 已知函數 $f(x)=e^{-a|x|}$ 且 $a>0$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\dfrac{2a}{\omega^2+a^2}$，試求函數 $G(\omega)=\dfrac{6e^{i\omega}\cos(4\omega)}{9+\omega^2}$ 的傅立葉逆轉換為何? (10%)

$$G(\omega)=\frac{6e^{i\omega}\cos(4\omega)}{9+\omega^2}=\frac{6e^{i\omega}}{9+\omega^2}\cdot\frac{e^{i4\omega}+e^{-i4\omega}}{2}=\frac{3}{9+\omega^2}e^{i5\omega}+\frac{3}{9+\omega^2}e^{-i3\omega}$$

已知 $\mathcal{F}[e^{-a|x|}]=\dfrac{2a}{\omega^2+a^2} \quad \Rightarrow f(x)=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{2a}{\omega^2+a^2}]=e^{-a|x|}$

$H(\omega)=\dfrac{3}{9+\omega^2} \quad \Rightarrow h(x)=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{3}{9+\omega^2}]=\dfrac{1}{2}e^{-3|x|}$

$\mathcal{F}[f(x-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega) \quad \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[e^{-i\omega T}F(\omega)]=f(x-T)$

$\therefore g(x)=\mathcal{F}^{-1}[G(\omega)]=h(x+5)+h(x-3)=\dfrac{1}{2}(e^{-3|x+5|}+e^{-3|x-3|})$