海大河工所 2002 研究所工數考題　May 20, 2002　　林三賢與陳正宗　　命題

1. 利用 Convolution theorem 求以下函數之逆(Inverse) Laplace 轉換 (10%)

$$\frac{1}{s(s^2+1)}$$

2. 考慮下列微分方程式 (15%)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+2x=g(t)$$

它所具有之唯一特解 $x_p(t)$ 與 g(t) 具有相同週期。求此週期解之傅立葉級數 (Fourier series) 之前 4 項，如果已知

g(t)=t,　　　　　　(-π<t<π)

g(π)=g(-π)= 0,　　及 g(t+2π)=g(t),　　　(對所有的 t)。

3. (a)證明 Cayley-Hamilton 定理對下列矩陣成立 (5%)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(b) 試求一旋轉錐 (cone of revolution) (5%)

$$z^2=4(x^2+y^2)$$

於點 P: (1,0,2) 處之單位垂直向量 (unit normal vector) **n**。

4. 一單擺(Pendulum)位移之微分方程式為

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{L}\sin x$$

其中 g 為重力加速度, L 為單擺之長度, x 為單擺與垂直軸之角位移。假設 g = L= 1.0。求此動力系統之臨界點 (Critical Points) (5%) 並討論它們的特性 (5%) 及穩定性 (5%)。

5. 試解釋 Green 定理與 Green 函數 (10 %)。

6. 試解釋實數對稱矩陣與 Hermitian 矩陣 (10 %)。以上兩種矩陣的特徵值是否為實數 (5%)。

7. 求解 u(x,t) 偏微分方程 (10 %)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t},$$

其中, t 表示時間而 x 為空間軸。初始條件 u(x,0) = sin(x).

請以此例說明並寫出特徵線(5 %),波速(5 %)與波進行的方向(5%)。

(filename:math-test.doc)