

(一) 利用 MFS 求解內域問題，並將源點(source point)分佈在 $r_s = 1.1$ 處

(a) By using 5 basis sets :

$$u(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^5 C_j \ln |\tilde{x} - \tilde{s}_j|, \quad \text{then build } [K]\{a\} = \{b\} \quad \text{where } \{a\} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}^T$$

$$[K] = \begin{bmatrix} -2.30259 & 0.212687 & 0.691875 & 0.691875 & 0.212687 \\ 0.212687 & -2.30259 & 0.212687 & 0.691875 & 0.691875 \\ 0.691875 & 0.212687 & -2.30259 & 0.212687 & 0.691875 \\ 0.691875 & 0.691875 & 0.212687 & -2.30259 & 0.212687 \\ 0.212687 & 0.691875 & 0.691875 & 0.212687 & -2.30259 \end{bmatrix} \quad \{b\} = \begin{bmatrix} 1. \\ -0.809017 \\ 0.309017 \\ 0.309017 \\ -0.809017 \end{bmatrix}$$

$$\text{We get } \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}^T = \begin{bmatrix} -0.45063 \\ 0.364567 \\ -0.139252 \\ -0.139252 \\ 0.364567 \end{bmatrix}$$

在 x 軸上取 4 點，並與解析解作比較，如下表所示：

	Exact solution	MFS (5 sets)	Relative error (%)
$u(-0.75, 0)$	-0.4219	0.1387	1328.78
$u(-0.25, 0)$	-0.0156	0.0247	2579.71
$u(0.25, 0)$	0.0156	0.0335	-1144.63
$u(0.75, 0)$	0.4219	0.4002	51.34

(b) By using 9 basis sets : build $[K]\{a\} = \{b\}$

$$[K] = \begin{bmatrix} -2.30259 & -0.322462 & 0.301604 & 0.598474 & 0.726664 & 0.726664 & 0.598474 & 0.301604 & -0.322462 \\ -0.322462 & -2.30259 & -0.322462 & 0.301604 & 0.598474 & 0.726664 & 0.726664 & 0.598474 & 0.301604 \\ 0.301604 & -0.322462 & -2.30259 & -0.322462 & 0.301604 & 0.598474 & 0.726664 & 0.726664 & 0.598474 \\ 0.598474 & 0.301604 & -0.322462 & -2.30259 & -0.322462 & 0.301604 & 0.598474 & 0.726664 & 0.726664 \\ 0.726664 & 0.598474 & 0.301604 & -0.322462 & -2.30259 & -0.322462 & 0.301604 & 0.598474 & 0.726664 \\ 0.726664 & 0.726664 & 0.598474 & 0.301604 & -0.322462 & -2.30259 & -0.322462 & 0.301604 & 0.598474 \\ 0.598474 & 0.726664 & 0.726664 & 0.598474 & 0.301604 & -0.322462 & -2.30259 & -0.322462 & 0.301604 \\ 0.301604 & 0.598474 & 0.726664 & 0.726664 & 0.598474 & 0.301604 & -0.322462 & -2.30259 & -0.322462 \\ -0.322462 & 0.301604 & 0.598474 & 0.726664 & 0.726664 & 0.598474 & 0.301604 & -0.322462 & -2.30259 \end{bmatrix}$$

$$\{b\} = \begin{bmatrix} 1. \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 1. \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 1. \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \text{We get } \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9\}^T = \begin{bmatrix} -0.552046 \\ 0.276023 \\ 0.276023 \\ -0.552046 \\ 0.276023 \\ 0.276023 \\ -0.552046 \\ 0.276023 \\ 0.276023 \end{bmatrix}$$

再次於 x 軸上取 4 點，並與解析解作比較，如下表所示：

	Exact solution	MFS (9 sets)	Relative error (%)
$u(-0.75, 0)$	-0.4219	-0.2193	480.09
$u(-0.25, 0)$	-0.0156	-0.0097	381.51
$u(0.25, 0)$	0.0156	0.0098	374.21
$u(0.75, 0)$	0.4219	0.3067	272.94

改取 55 個基底函數，並與解析解作比較，如下表所示：

	Exact solution	MFS (9 sets)	Relative error (%)
$u(-0.75, 0)$	-0.421875	-0.421531	0.82
$u(-0.25, 0)$	-0.015625	-0.0156123	0.82
$u(0.25, 0)$	0.015625	0.0156123	0.82
$u(0.75, 0)$	0.421875	0.421531	0.82

(二) 改變源點(source point)分佈位置，取在 $r_s = 2.0$ 處，並取 9 個基底

	Exact solution	MFS (9 sets)	Relative error (%)
$u(-0.75, 0)$	-0.4219	-0.3864	84.14
$u(-0.25, 0)$	-0.0156	-0.0147	60.22
$u(0.25, 0)$	0.0156	0.0147	58.38
$u(0.75, 0)$	0.4219	0.4073	34.46

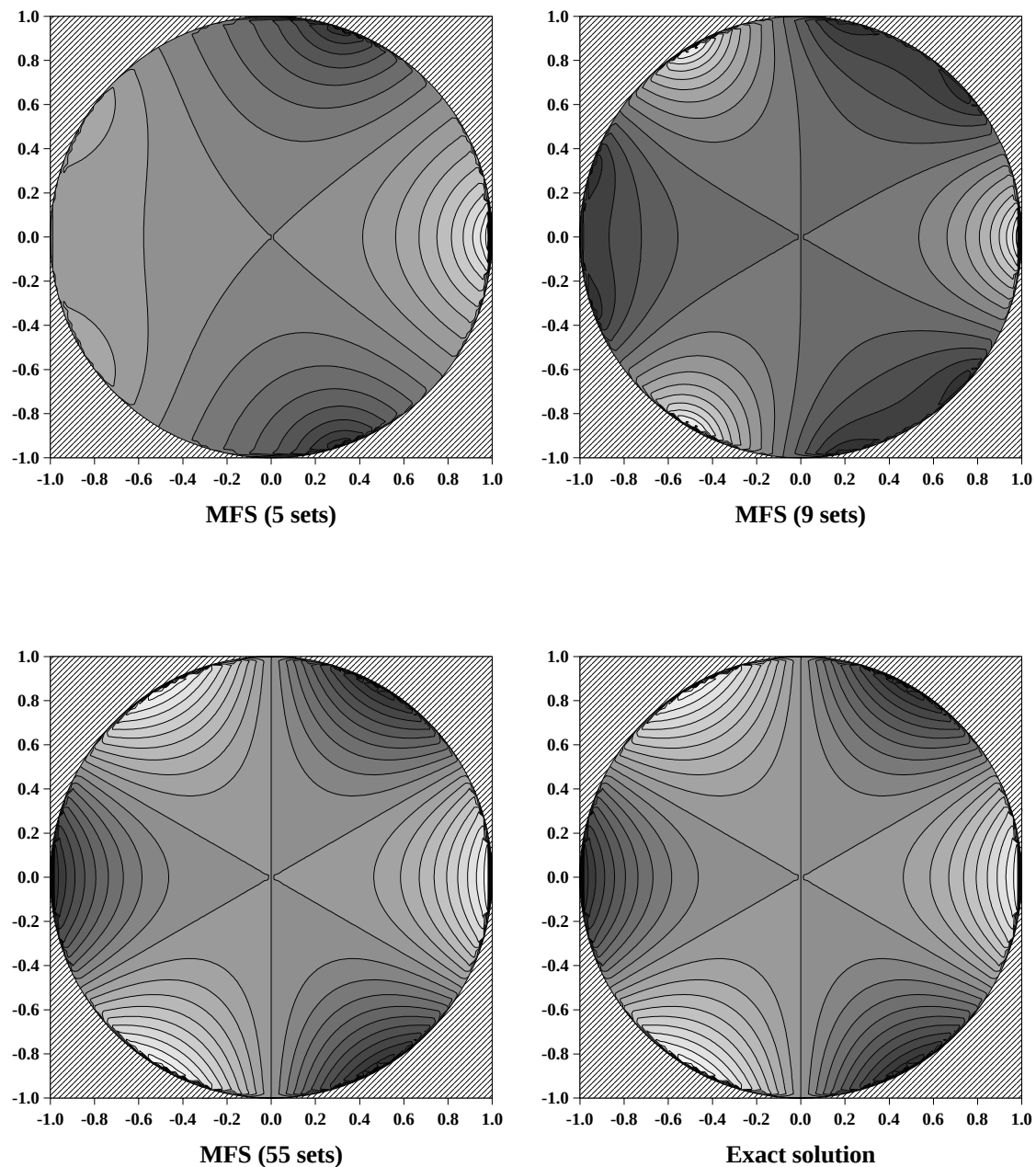
(三) 改變源點(source point)分佈位置，取在 $r_s = 10.0$ 處，並取 9 個基底

	Exact solution	MFS (9 sets)	Relative error (%)
$u(-0.75, 0)$	-0.4219	-0.4216	0.71
$u(-0.25, 0)$	-0.0156	-0.0156	0.51
$u(0.25, 0)$	0.0156	0.0156	0.49
$u(0.75, 0)$	0.4219	0.4218	0.29

(四) 再次改變源點(source point)分佈位置，取在 $r_s = 20.0$ 處，並取 6 個基底

	Exact solution	MFS (9 sets)	Relative error (%)
$u(-0.75, 0)$	-0.421875	-0.421875	4.3×10^{-6}
$u(-0.25, 0)$	-0.015625	-0.015625	5.8×10^{-6}
$u(0.25, 0)$	0.015625	0.015625	4.7×10^{-6}
$u(0.75, 0)$	0.421875	0.421875	4.3×10^{-6}

(五) 分別畫出源點選在 $r_s = 1.1$ 處之不同基底個數的場分佈圖



討論：

1. 從以上的數值測試結果，可以看出當源點皆分佈在 $r_s = 1.1$ 處時，隨著所選取之基底函數個數的增加，其場解會愈來愈逼近解析解。可是，我們會發現基底函數的個數必須取到 55 個才可以使得場解的相對誤差控制在千分之一以下。
2. 本來我還認為 MFS 此時的效用並不高，可是，我開始嘗試改變源點分佈的位置，即 r_s ，結果當我第一次把源點改放到 $r_s = 2.0$ 處時，發現取 9 個基底時，其場解的相對誤差已有明顯下降的趨勢，於是在經過多次的測試後，當我把源點放在 $r_s = 20.0$ 處時，可發現取 6 個基底時，其場解幾乎等於解析解，相當精準，不過，當我分別取 r_s 為 2.0、3.0、4.0、5.0、10.0 及 20.0 的過程中，可發現在取 6 個基底時，其相對誤差會是最低的，可是再繼續增加基底時，相對誤差就會開始變大，而且會呈一振盪的不穩定現象，與韓國的 Kang 類似。
3. 由以上計算例之將 r_s 取大後可使答案變得較好的現象後，我大膽假設如果命題不是一較簡單的內域問題，對於源點的放置是否會有一最佳的位置所在？而且基底的數目是不是愈取愈多答案就會好？
4. 可發現本命題所得到的矩陣 $[K]$ 為一對稱方陣，對於數值上而言，是一個較好的現象。