

(一) 利用 **MFS** 求解 $r \geq 1$ 的外域問題，並將源點(source point)分佈在 $r_s = 0.9$ 處

(a) By using 5 basis sets :

$$u(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^5 C_j \ln |\tilde{x} - \tilde{s}_j|, \quad \text{then build } [K]\{a\} = \{b\} \quad \text{where } \{a\} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}^T$$

$$[K] = \begin{matrix} & i & & & y \\ \begin{matrix} -2.30259 & 0.113077 & 0.591818 & 0.591818 & 0.113077 \\ 0.113077 & -2.30259 & 0.113077 & 0.591818 & 0.591818 \\ 0.591818 & 0.113077 & -2.30259 & 0.113077 & 0.591818 \\ 0.591818 & 0.591818 & 0.113077 & -2.30259 & 0.113077 \\ k & 0.113077 & 0.591818 & 0.591818 & -2.30259 \end{matrix} \end{matrix} & \begin{matrix} i & & y \\ \begin{matrix} 1. \\ -0.809017 \\ 0.309017 \\ 0.309017 \\ k & -0.809017 \end{matrix} \end{matrix} \{$$

$$\text{We get } \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}^T = \begin{matrix} i & & y \\ \begin{matrix} -0.471746 \\ 0.381651 \\ -0.145778 \\ -0.145778 \\ k & 0.381651 \end{matrix} \end{matrix} \{$$

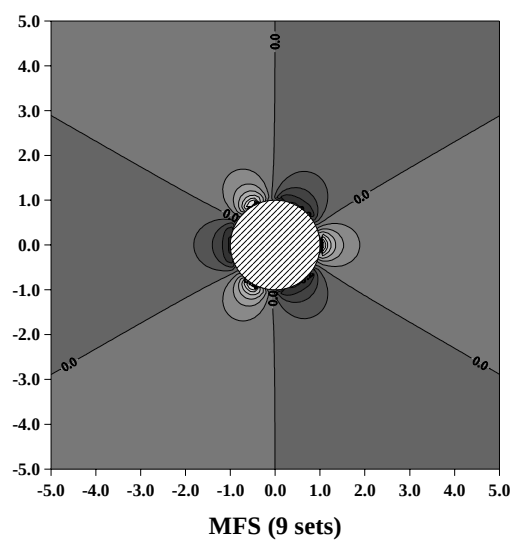
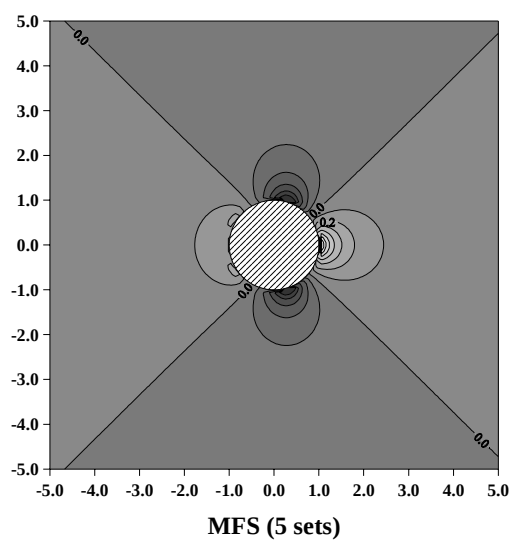
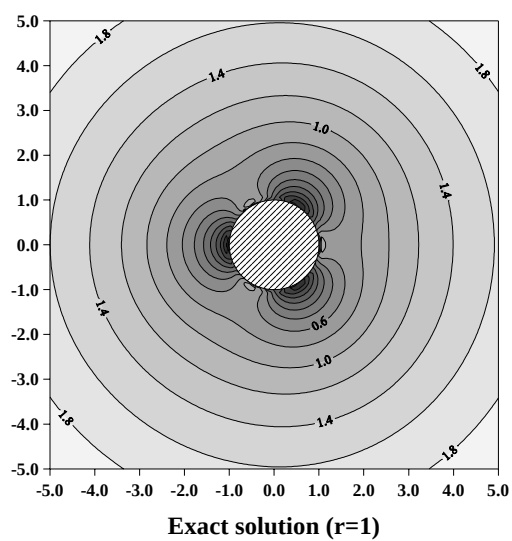
(b) By using 9 basis sets : build $[K]\{a\} = \{b\}$

$$[K] = \begin{matrix} & i & & & & & & & y \\ \begin{matrix} -2.30259 & -0.420684 & 0.201876 & 0.498474 & 0.626588 & 0.626588 & 0.498474 & 0.201876 & -0.420684 \\ -0.420684 & -2.30259 & -0.420684 & 0.201876 & 0.498474 & 0.626588 & 0.626588 & 0.498474 & 0.201876 \\ 0.201876 & -0.420684 & -2.30259 & -0.420684 & 0.201876 & 0.498474 & 0.626588 & 0.626588 & 0.498474 \\ 0.498474 & 0.201876 & -0.420684 & -2.30259 & -0.420684 & 0.201876 & 0.498474 & 0.626588 & 0.626588 \\ 0.626588 & 0.498474 & 0.201876 & -0.420684 & -2.30259 & -0.420684 & 0.201876 & 0.498474 & 0.626588 \\ 0.626588 & 0.626588 & 0.498474 & 0.201876 & -0.420684 & -2.30259 & -0.420684 & 0.201876 & 0.498474 \\ 0.498474 & 0.626588 & 0.626588 & 0.498474 & 0.201876 & -0.420684 & -2.30259 & -0.420684 & 0.201876 \\ 0.201876 & 0.498474 & 0.626588 & 0.626588 & 0.498474 & 0.201876 & -0.420684 & -2.30259 & -0.420684 \\ k & -0.420684 & 0.201876 & 0.498474 & 0.626588 & 0.626588 & 0.498474 & 0.201876 & -0.420684 \end{matrix} \end{matrix} & \begin{matrix} i & & y \\ \begin{matrix} 1. \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 1. \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 1. \\ -0.5 \\ k & -0.5 \end{matrix} \end{matrix} \{$$

$$\{b\} = \begin{matrix} i & & y \\ \begin{matrix} 1. \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 1. \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 1. \\ -0.5 \\ k & -0.5 \end{matrix} \end{matrix} \quad \text{We get } \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9\}^T = \begin{matrix} i & & y \\ \begin{matrix} -0.583629 \\ 0.291815 \\ 0.291815 \\ -0.583629 \\ 0.291815 \\ 0.291815 \\ -0.583629 \\ 0.291815 \\ k & 0.291815 \end{matrix} \end{matrix} \{$$

以上我所代的邊界條件是 $u(1, \theta) = \cos(3\theta)$ 。

分別畫出源點選在 $r_s = 0.9$ 處之不同基底個數的場分佈圖



(二) 利用 **MFS** 求解 $r \geq 2$ 的外域問題，並將源點(source point)分佈在 $r_s = 1.9$ 處

(a) By using 5 basis sets :

$$u(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^5 C_j \ln |\tilde{x} - \tilde{s}_j|, \quad \text{then build } [K]\{a\} = \{b\} \quad \text{where } \{a\} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}^T$$

$$[K] = \begin{bmatrix} i & -2.30259 & 0.830205 & 1.31083 & 1.31083 & 0.830205 \\ & 0.830205 & -2.30259 & 0.830205 & 1.31083 & 1.31083 \\ & 1.31083 & 0.830205 & -2.30259 & 0.830205 & 1.31083 \\ & 1.31083 & 1.31083 & 0.830205 & -2.30259 & 0.830205 \\ k & 0.830205 & 1.31083 & 1.31083 & 0.830205 & -2.30259 \end{bmatrix} \quad \{b\} = \begin{bmatrix} i & 0.818147 \\ & 0.59202 \\ & 0.731774 \\ & 0.731774 \\ k & 0.59202 \end{bmatrix}$$

$$\text{We get } \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}^T = \begin{bmatrix} i & 0.306085 \\ & 0.385827 \\ & 0.336544 \\ & 0.336544 \\ k & 0.385827 \end{bmatrix}$$

在 x 軸上取 4 點，並與解析解作比較，如下表所示：

	Exact solution	MFS (5 sets)	Relative error (%)
$u(-4, 0)$	1.37067	2.44397	-783
$u(-3, 0)$	1.06158	1.96996	-856
$u(3, 0)$	1.13565	1.91835	-689
$u(4, 0)$	1.40192	2.43508	-736

(b) By using 9 basis sets : build $[K]\{a\} = \{b\}$

$$[K] = \begin{bmatrix} i & -2.30259 & 0.290566 & 0.919502 & 1.21725 & 1.34568 & 1.34568 & 1.21725 & 0.919502 & 0.290566 \\ & 0.290566 & -2.30259 & 0.290566 & 0.919502 & 1.21725 & 1.34568 & 1.34568 & 1.21725 & 0.919502 \\ & 0.919502 & 0.290566 & -2.30259 & 0.290566 & 0.919502 & 1.21725 & 1.34568 & 1.34568 & 1.21725 \\ & 1.21725 & 0.919502 & 0.290566 & -2.30259 & 0.290566 & 0.919502 & 1.21725 & 1.34568 & 1.34568 \\ & 1.34568 & 1.21725 & 0.919502 & 0.290566 & -2.30259 & 0.290566 & 0.919502 & 1.21725 & 1.34568 \\ & 1.34568 & 1.34568 & 1.21725 & 0.919502 & 0.290566 & -2.30259 & 0.290566 & 0.919502 & 1.21725 \\ & 1.21725 & 1.34568 & 1.34568 & 1.21725 & 0.919502 & 0.290566 & -2.30259 & 0.290566 & 0.919502 \\ & 0.919502 & 1.21725 & 1.34568 & 1.34568 & 1.21725 & 0.919502 & 0.290566 & -2.30259 & 0.290566 \\ k & 0.290566 & 0.919502 & 1.21725 & 1.34568 & 1.34568 & 1.21725 & 0.919502 & 0.290566 & -2.30259 \end{bmatrix}$$

$$\{b\} = \begin{bmatrix} i & 0.818147 \\ & 0.630647 \\ & 0.630647 \\ & 0.818147 \\ & 0.630647 \\ & 0.630647 \\ & 0.818147 \\ & 0.630647 \\ k & 0.630647 \end{bmatrix} \quad \text{We get } \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9\}^T = \begin{bmatrix} i & 0.0806232 \\ & 0.15798 \\ & 0.15798 \\ & 0.0806232 \\ & 0.15798 \\ & 0.15798 \\ & 0.0806232 \\ & 0.15798 \\ k & 0.15798 \end{bmatrix}$$

再次於 x 軸上取 4 點，並與解析解作比較，如下表所示：

	Exact solution	MFS (9 sets)	Relative error (%)
$u(-4, 0)$	1.37067	1.64166	-198
$u(-3, 0)$	1.06158	1.29213	-217
$u(3, 0)$	1.13565	1.32713	-169
$u(4, 0)$	1.40192	1.65792	-183

改取 65 個基底函數，並與解析解作比較，如下表所示：

	Exact solution	MFS (65 sets)	Relative error (%)
$u(-4, 0)$	1.37067	1.37185	-0.86
$u(-3, 0)$	1.06158	1.06261	-0.97
$u(3, 0)$	1.13565	1.13639	-0.65
$u(4, 0)$	1.40192	1.40298	-0.75

(I) 改變源點(source point)分佈位置，取在 $r_s = 1.5$ 處，並取 18 個基底

	Exact solution	MFS (18 sets)	Relative error (%)
$u(-4, 0)$	1.37067	1.37141	-0.54
$u(-3, 0)$	1.06158	1.06233	-0.72
$u(3, 0)$	1.13565	1.13589	-0.21
$u(4, 0)$	1.40192	1.40244	-0.37

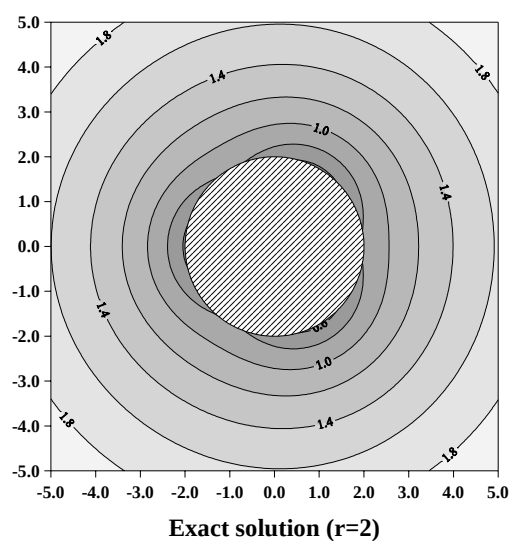
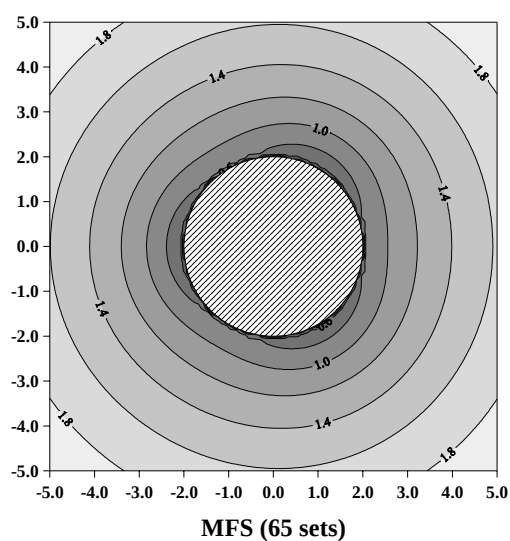
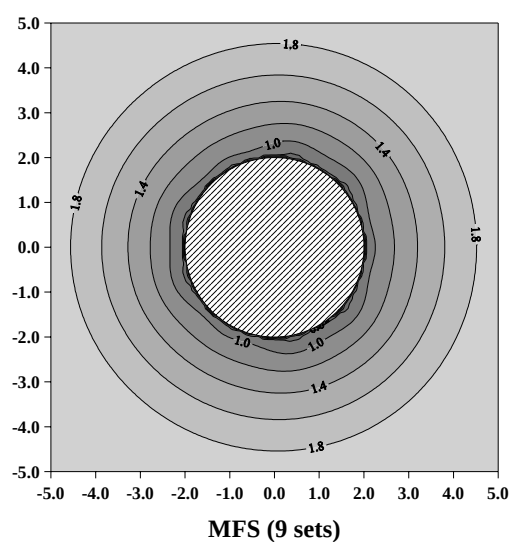
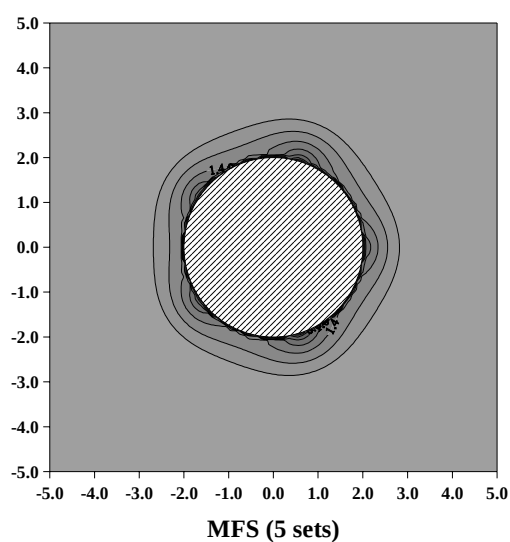
(II) 改變源點(source point)分佈位置，取在 $r_s = 1.0$ 處，並取 10 個基底

	Exact solution	MFS (9 sets)	Relative error (%)
$u(-4, 0)$	1.37067	1.37125	-0.42
$u(-3, 0)$	1.06158	1.06251	-0.88
$u(3, 0)$	1.13565	1.13502	0.56
$u(4, 0)$	1.40192	1.40173	0.14

(III) 再次改變源點(source point)分佈位置，取在 $r_s = 0.5$ 處，並取 6 個基底

	Exact solution	MFS (6 sets)	Relative error (%)
$u(-4, 0)$	1.37067	1.37075	-0.06
$u(-3, 0)$	1.06158	1.06164	-0.06
$u(3, 0)$	1.13565	1.13571	-0.05
$u(4, 0)$	1.40192	1.402	-0.06

(IV) 分別畫出源點選在 $r_s = 1.9$ 處之不同基底個數的場分佈圖



討論：

1. 從以上的數值測試結果，我發現在作半徑為 1 的外域問題時，雖然所求得之 $[K]$ 矩陣是可以 inverse 的，不過，不論是取 5 項或是 9 項基底所求出的答案似乎都蠻糟的，就算把源點往內放，好像還是一樣糟，我想應該是和作業 4 類似的情況，只是目前我還不知解決方法為何？
2. 在半徑為 2 的外域問題中，由數值測試結果可看出當源點皆分佈在 $r_s = 1.9$ 處時，其場解會隨著所選取之基底函數個數的增加而愈來愈逼近解析解。可是，我們會發現基底函數的個數必須取到 65 個才可以使得場解的相對誤差控制在千分之一以下。
3. 在嘗試改變源點分佈位置 r_s 的過程中，當把源點改放到 $r_s = 1.5$ 處時，可發現同樣取 9 個基底時，其場解的相對誤差已有明顯下降的趨勢，於是在多次的測試後，當取 r_s 為 0.5 時，只取 6 個基底已可使相對誤差控制在千分之一以下。
4. 從以上的計算例中，可以看出將 r_s 取小後可使答案變得較好，此現象似乎與作業 4 之內域問題的情況相類似，也就是將 r_s 取大後可使答案變好。
5. 本命題所得到的矩陣 $[K]$ 仍為一對稱方陣。