年級：＿＿＿＿＿＿　姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　學號：＿＿＿＿＿＿＿＿

國立台灣海洋大學河海工程學系２００４工程數學（三）第八次小考解答

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=?$

$$\int_0^x(\frac{x^3}{3}-\frac{x}{3})dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3\pi^3}(-1)^n\sin(n\pi x)dx$$

$$\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{n^4\pi^4}(-1)^n\cos(n\pi x)+c$$

方法一：(陳品志)

$$c=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{6})dx=\frac{-7}{180}$$

方法二：(老師與助教)

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{n^4\pi^4}+c$$

$$c=\frac{-7}{180}$$

$$\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{6}=\frac{-7}{180}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{n^4\pi^4}(-1)^n\cos(n\pi x)$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{6})dx=(\frac{-7}{180})^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(-\frac{4}{n^4\pi^4}(-1)^n)^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9450}\approx 1.004077356$$

方法三：(高聖凱)

$$x^4=\frac{1}{5}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{8}{n^2\pi^2}-\frac{48}{n^4\pi^4})(-1)^n\cos(n\pi x)$$

$$\int_{-1}^{1}x^8dx=\frac{2}{25}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{64}{(n\pi)^4}-\frac{768}{(n\pi)^6}+\frac{2304}{(n\pi)^8})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9450}\approx 1.004077356$$

條條大路通羅馬!