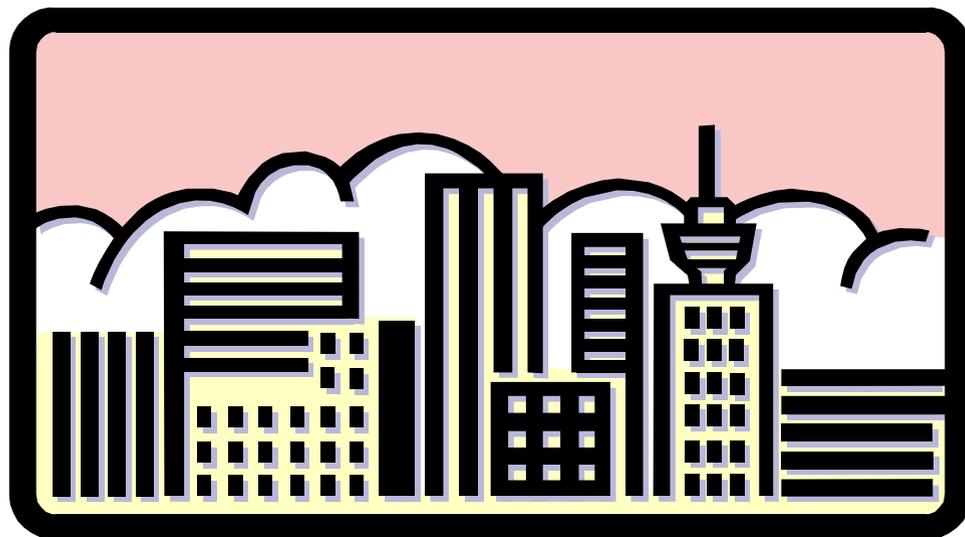


邊界元素法在拉普拉斯方程 反算問題之應用



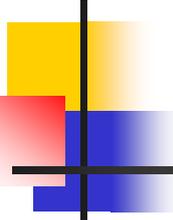
報告者：林盛益

指導教授：陳正宗

日期：2002/11/14

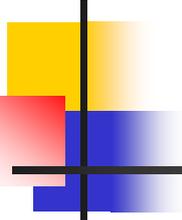
歷史回顧(海洋大學河工系)

- 葉為忠(T. Mura), An inverse problem in elasticity, 1991.
- 陳桂鴻(陳正宗), 地盤反應逆向運算 - 病態問題, 1996.
- 翁煥昌與陳桂鴻(陳正宗), 石化工業加熱爐爐膛溫度場分佈之數值分析與研究, 1996.
- 謝旻航(葉為忠), 拉普拉斯方程式柯西問題之探討, 1997.
- 方金惠(郭世榮), 過定邊界反算問題正規化之研究, 1998
- 陳桂鴻(陳正宗), Analytical Study and Numerical Experiments for Laplace Equations with Overspecified Boundary Conditions, 1998.



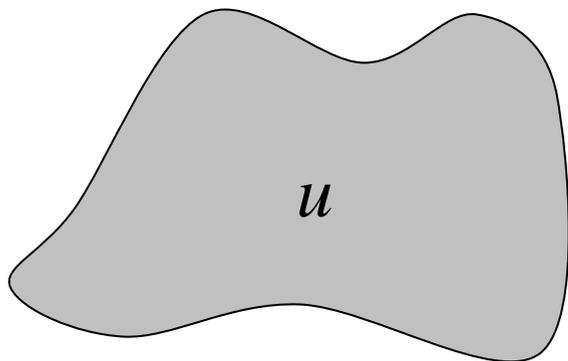
大綱

- 邊界元素法
- 四種邊界元素法之比較
- 反算問題
- 正規化方法(TSVD + L curve)
- 數值結果
- 結論

- 
-
- **邊界元素法**
 - 四種邊界元素法之比較
 - 反算問題
 - 正規化方法(TSVD + L curve)
 - 數值結果
 - 結論

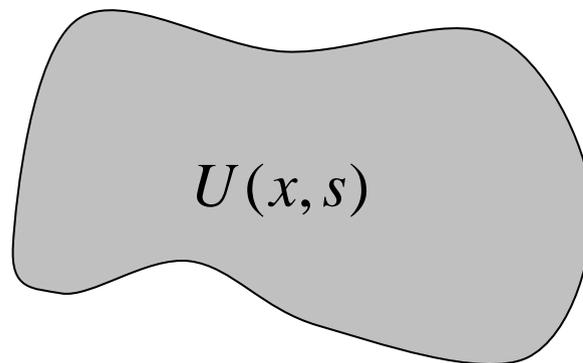
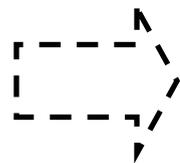
邊界元素法

■ 欲解系統



$$G.E. \quad \nabla^2 u = 0$$

■ 輔助系統



$$G.E. \quad \nabla^2 U(x, s) = 2\pi\delta(x - s)$$

功能互換

- 格林第三定理

$$\iint (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dD = \int_B \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dB$$

將 $u = u$, $v = U(x, s)$,

$\nabla^2 u = 0$, $\nabla^2 U(x, s) = 2\pi\delta(x - s)$ 代入

積分方程式

$$2\pi u(s) = \int_B \frac{\partial U(x, s)}{\partial n_x} u(x) dB(x) - \int_B U(x, s) \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} dB(x)$$

$s \in D, \quad x \in B,$

■ 域內點積分方程式(DIE)

$$2\pi u(x) = \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - \int_B U(s, x) t(s) dB(s)$$

$$x \in D, \quad s \in B, \quad T(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s}, \quad t(s) = \frac{\partial u(s)}{\partial n_s}$$

邊界積分方程式 (BIE)

■ 奇異積分方程

$$\pi u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in B$$

■ 超奇異積分方程

$$\pi t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in B$$

$$U(s, x) = \ln(r), \quad T(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_s},$$

$$L(s, x) = \frac{\partial U(s, x)}{\partial n_x}, \quad M(s, x) = \frac{\partial^2 U(s, x)}{\partial n_s \partial n_x}$$

離散化

■ 對偶積分方程

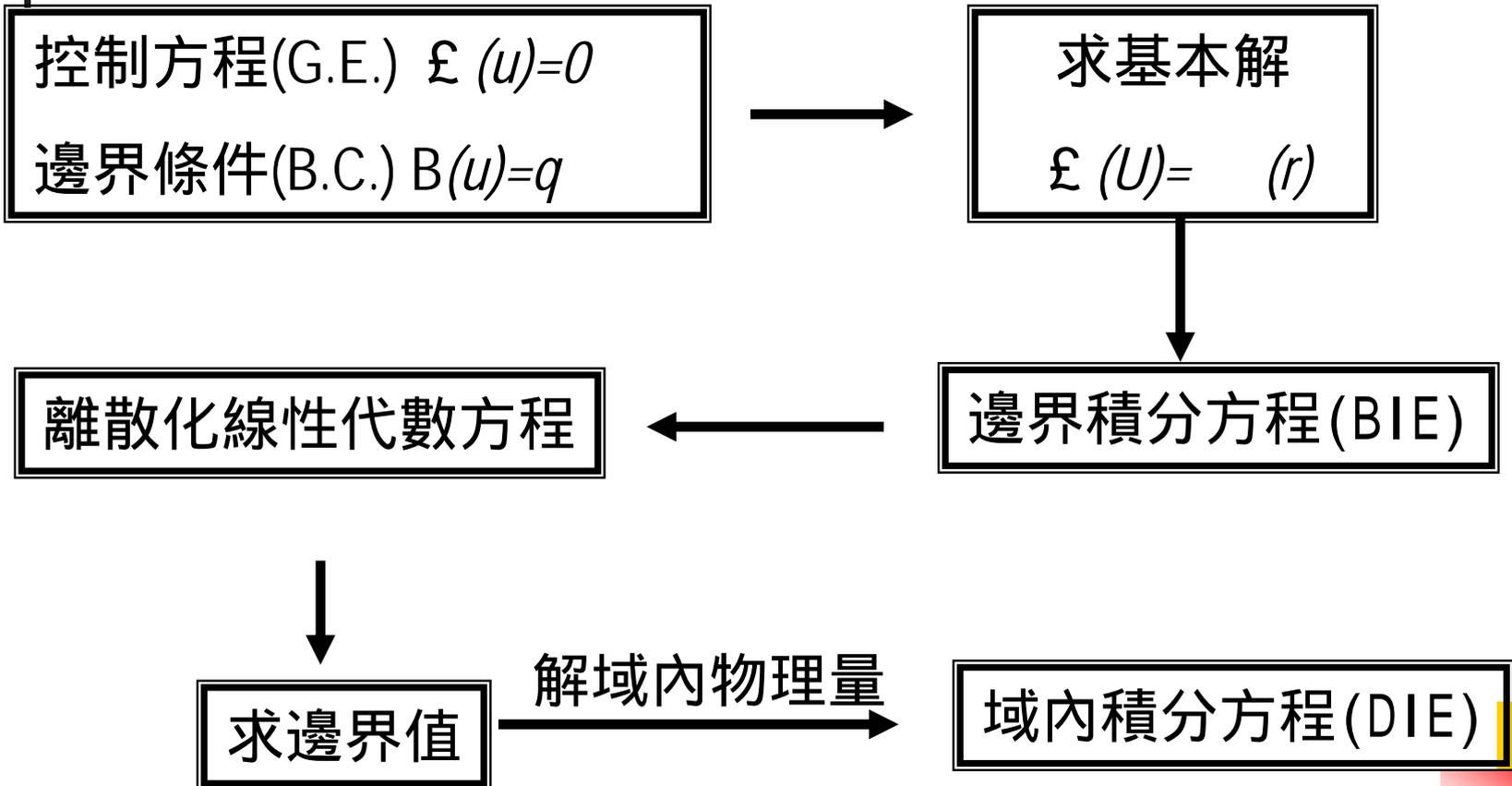
$$\pi u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in B$$

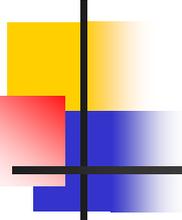
$$[U]\{t\} = [T]\{u\}$$

$$\pi t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in B$$

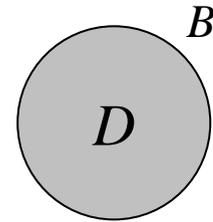
$$[L]\{t\} = [M]\{u\}$$

BEM 解題流程



- 
-
- 邊界元素法
 - 四種邊界元素法之比較
 - 反算問題
 - 正規化方法(TSVD + L curve)
 - 數值結果
 - 結論

直接法(Direct BEM)



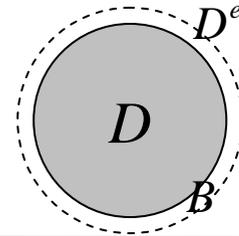
■ 奇異積分方程

$$\pi u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in D$$

■ 超奇異積分方程

$$\pi t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in D$$

域外點積分方程

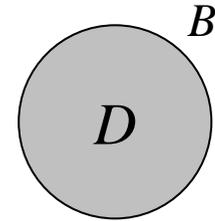


Null-field Equations

$$0 = \int_B U(s, x)t(s)dB(s) - \int_B T(s, x)u(s)dB(s), \quad x \in D^e, s \in B$$

$$0 = \int_B M(s, x)u(s)dB(s) - \int_B L(s, x)t(s)dB(s), \quad x \in D^e, s \in B$$

間接法(Indirect BEM)



■ 單層勢能(Single Layer)

$$u(x) = \int U(s, x)\phi(s)dB(s), \quad x \in D, s \in B$$

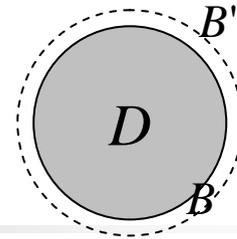
$$t(x) = \int L(s, x)\phi(s)dB(s), \quad x \in D, s \in B$$

■ 雙層勢能(Double Layer)

$$u(x) = \int T(s, x)\varphi(s)dB(s), \quad x \in D, s \in B$$

$$t(x) = \int_B M(s, x)\varphi(s)dB(s), \quad x \in D, s \in B$$

廣義間接法



■ 單層勢能(Single Layer)

$$u(x) = \int_{B'} U(s, x) \phi(s) dB(s), \quad x \in D, s \in B'$$

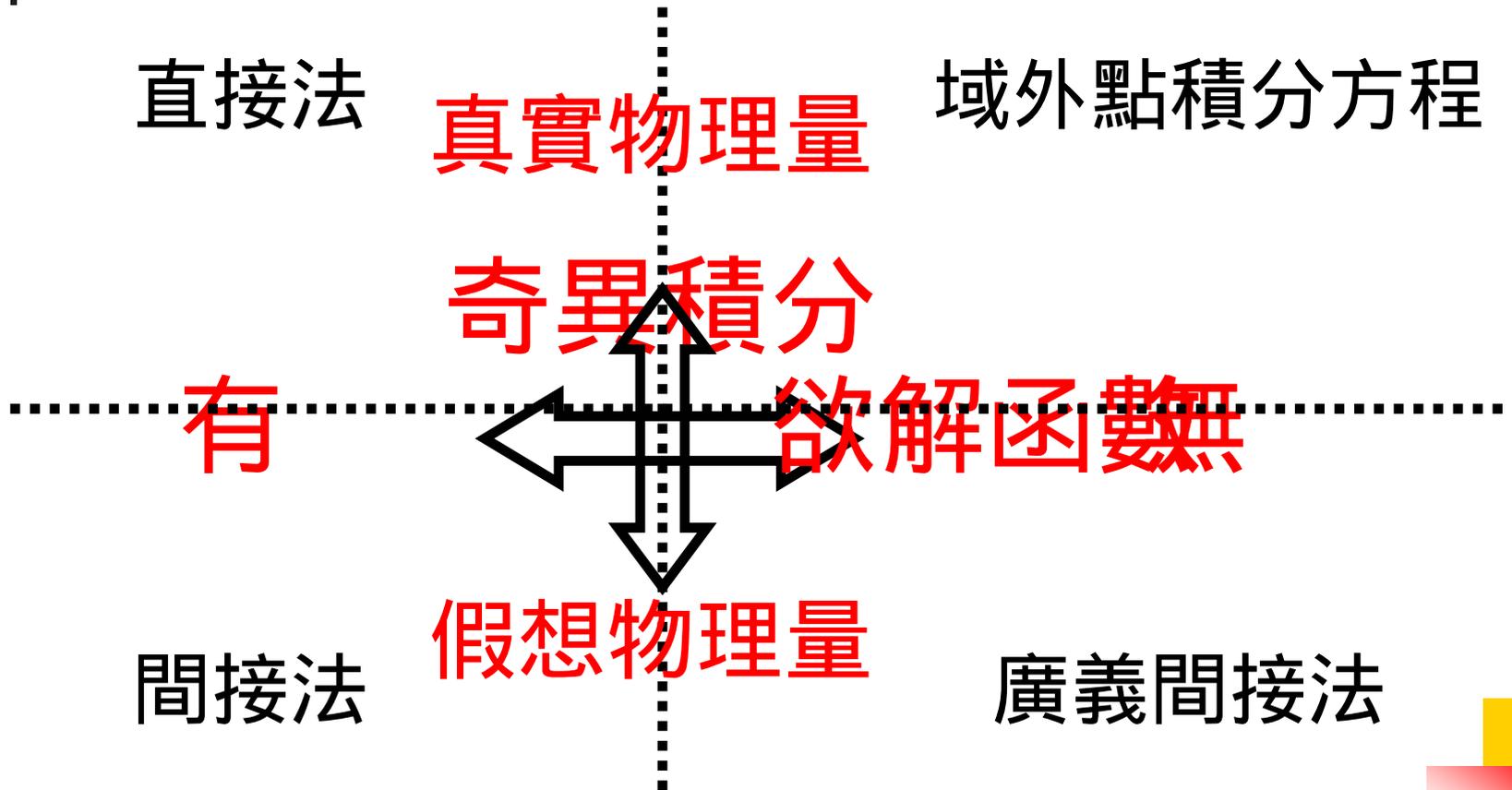
$$t(x) = \int_{B'} L(s, x) \phi(s) dB(s), \quad x \in D, s \in B'$$

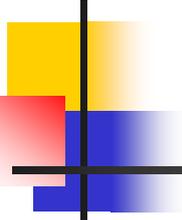
■ 雙層勢能(Double Layer)

$$u(x) = \int_{B'} T(s, x) \varphi(s) dB(s), \quad x \in D, s \in B'$$

$$t(x) = \int_{B'} M(s, x) \varphi(s) dB(s), \quad x \in D, s \in B'$$

四種方法之異同





矩陣條件數之決定

- 條件數(Condition Number)

$$C = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$$

循環矩陣

考慮為一邊界為圓，半徑為 ρ 之內域問題，在邊界上均勻分佈元素

$$[U] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{2N-1} \\ a_{2N-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{2N-2} \\ a_{2N-2} & a_{2N-1} & a_0 & \cdots & a_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \quad \text{及} \quad \begin{aligned} a_m &= a_{2N-m}, \\ m &= 0, 1, 2, \dots, 2N-1 \end{aligned}$$

$$\lambda_l = a_0 + a_1(\alpha_l)^1 + a_2(\alpha_l)^2 + \cdots + a_{2n-1}(\alpha_l)^{2n-1}, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), N$$

$$\alpha_n = e^{i2\pi n / 2N}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), N \quad \text{or} \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$$

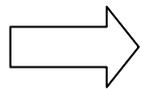
退化核

$$s = (R, \theta) \quad x = (\rho, \phi)$$

$$U(s, x) = \begin{cases} U^i(s, x) = \ln(R) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^m \cos(m(\theta - \phi)), & R > \rho \\ U^e(s, x) = \ln(\rho) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{R}{\rho}\right)^m \cos(m(\theta - \phi)), & R < \rho \end{cases}$$

$$a_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta\theta}^{(m+\frac{1}{2})\Delta\theta} U(\theta, 0) \rho \, d\theta$$

$$\lambda_l = a_0 + (-1)^l a_N + \sum_{m=1}^{N-1} (\alpha_l^m + \alpha_l^{2N-m}) a_m = \sum_{m=0}^{2N-1} \cos(ml\Delta\theta) a_m$$



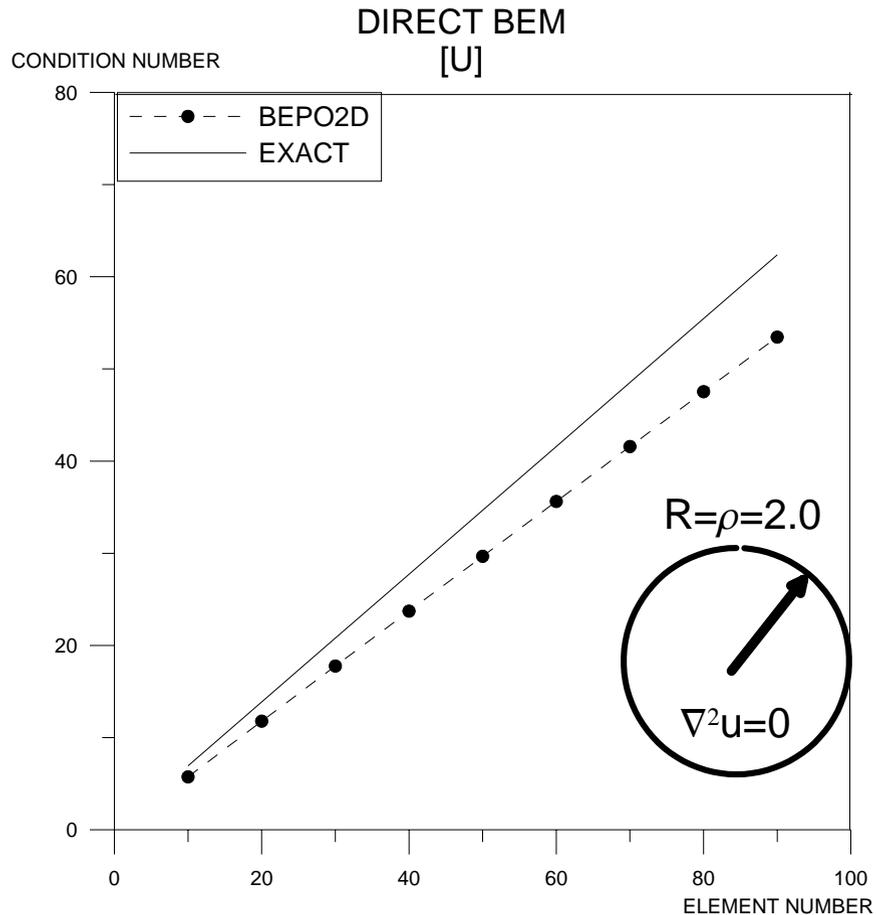
$$\lambda_l \approx \sum_{m=0}^{2N-1} \cos(ml\Delta\theta) U(m\Delta\theta) R \Delta\theta = \int_0^{2\pi} \cos(l\theta) U(\theta) R \, d\theta$$

各種影響係數矩陣之奇異值

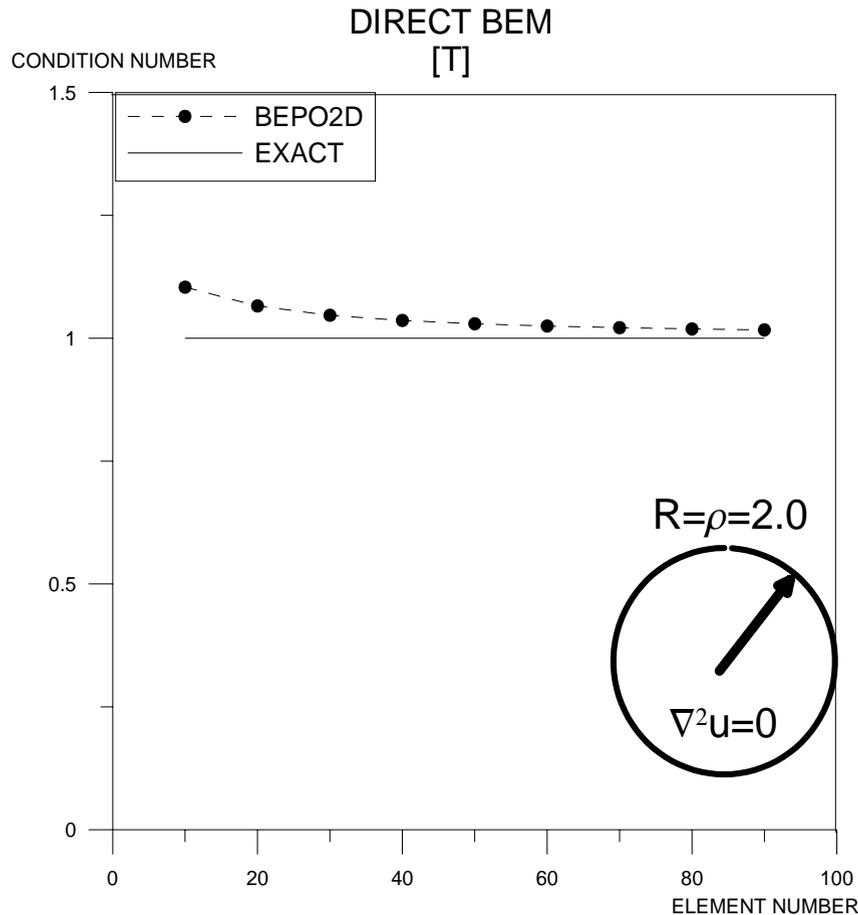
方法 矩陣	直接法 K^e ($R = \rho = a$)	間接法(B) K^i ($R = \rho = a$)	零場方程 K^e	廣義間接法(B') K^i
[U]	$\lambda_l = \begin{cases} 2\pi \ln a & , l=0 \\ -\frac{\pi}{l} a & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 2\pi \ln a & , l=0 \\ -\frac{\pi}{l} a & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 2\pi R \ln \rho & , l=0 \\ -\frac{\pi R^{l+1}}{l \rho^l} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 2\pi R \ln R & , l=0 \\ -\frac{\pi R^l}{l R^{l-1}} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$
[T]	$\lambda_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ -\pi & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 2\pi & , l=0 \\ \pi & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ -\pi \left(\frac{R}{\rho}\right)^l & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 2\pi & , l=0 \\ \pi \left(\frac{\rho}{R}\right)^l & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$
[L]	$\lambda_l = \begin{cases} 2\pi & , l=0 \\ \pi & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ -\pi & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 2\pi \left(\frac{R}{\rho}\right)^l & , l=0 \\ \pi \left(\frac{R}{\rho}\right)^{l+1} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ -\pi \left(\frac{\rho}{R}\right)^{l+1} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$
[M]	$\lambda_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ \pi \frac{1}{a} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ \pi \frac{1}{a} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ \pi \frac{R^l}{\rho^{l+1}} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$\lambda_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ \pi \frac{\rho^{l+1}}{R^l} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$

其中 λ_l 為 $[K]$ 之奇異值，場點 $x = (\rho, \phi)$ ，源點 $s = (R, \theta)$ ，離散之元素個數為 $2N+1$ 。 K^e 及 K^i 分別代表外，內域之核函數， K 可為 U, T, L 或 M 。

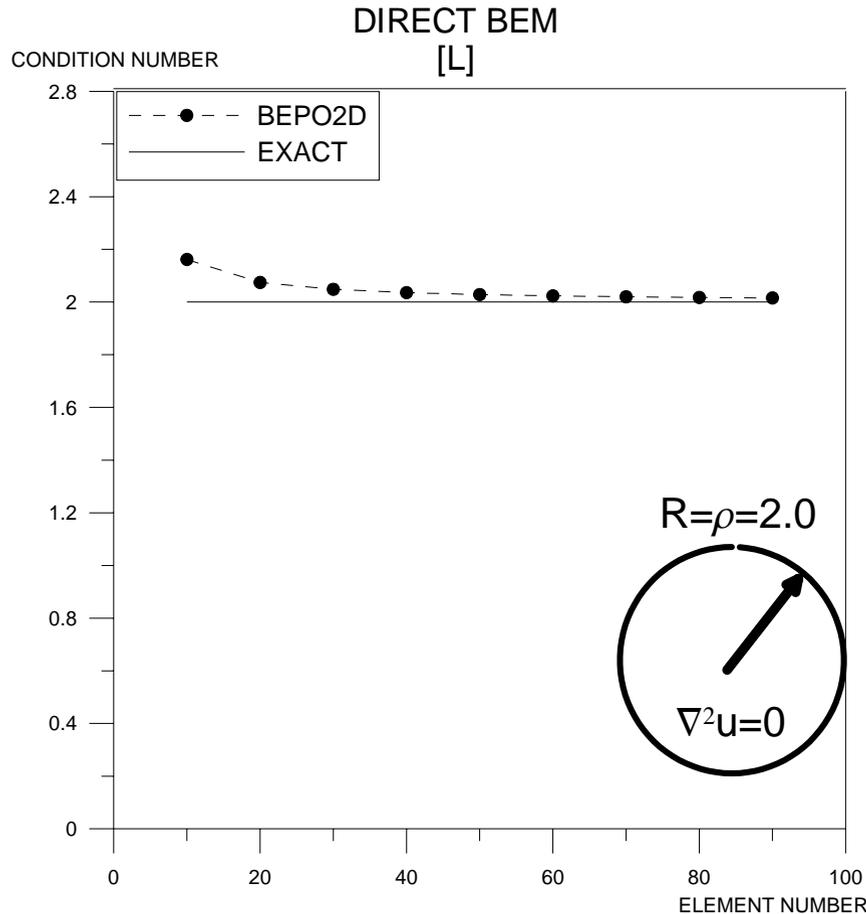
[U]矩陣條件數



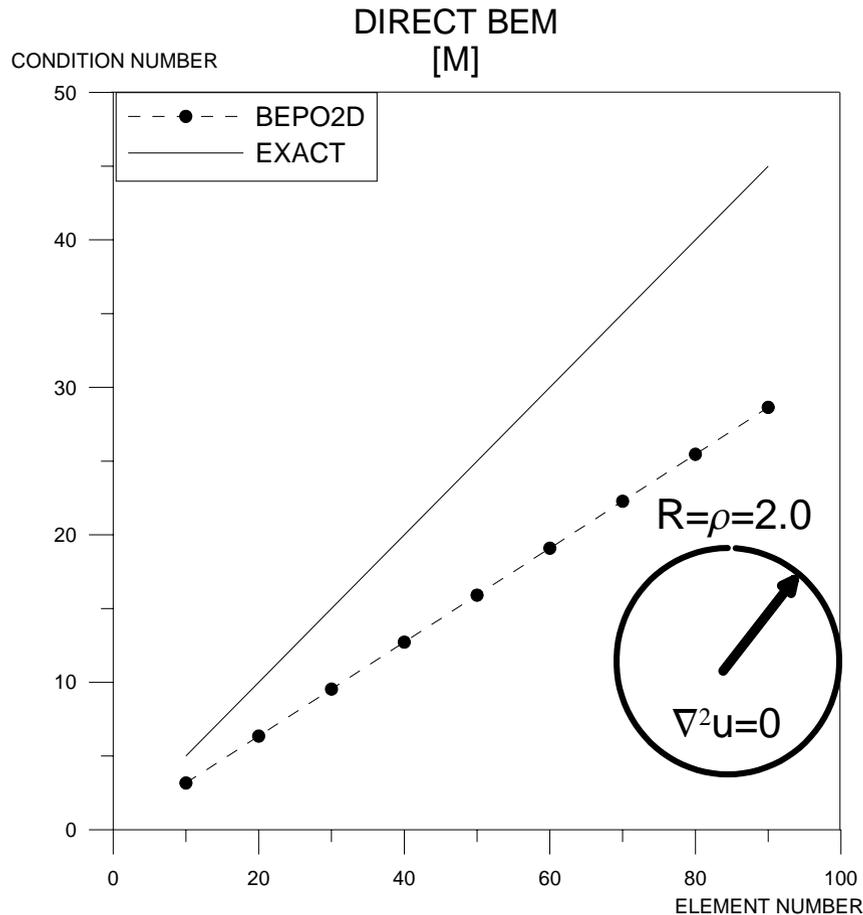
[T]矩陣條件數

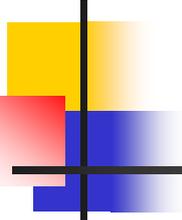


[L]矩陣條件數



[M]矩陣條件數

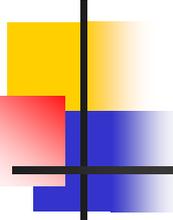


- 
-
- 邊界元素法
 - 四種邊界元素法之比較
 - 反算問題
 - 正規化方法(TSVD + L curve)
 - 數值結果
 - 結論

工程問題之正算與反算模式

- 學者阿達馬 (Hadamard) 對於定義良態模式有以下之看法，良態模式必滿足下列三個條件：
 1. 解的存在性。
 2. 解的唯一性。
 3. 解的連續性。

若不滿足上列之條件，則會有病態模式之產生



反算問題之種類

- 缺少控制方程之反算問題(電路系統之辨識問題)
- 缺少內力源資訊之反算問題(地盤反算之問題，地震波之傳遞情形)
- 缺少材料特性之反算問題(開挖工程之土壤性質推求)
- 缺少領域之反算問題(設計最佳機翼形狀)。

反算問題之種類

- 缺少邊界條件之反算問題(給過定邊界條件)。
 1. 隧道開挖時，開挖面的位移及曳引力均可量測，然而前進端的資訊則一無所知
 2. 如鍋爐之熱傳情形，溫度分布之情況，在可量測端，溫度與溫度梯度可掌握，另一端則全不知。
 3. 人體血液之流動情形的量測。
 4. 鋼筋混凝土之拉拔試驗，應力應變之情形。

給過定邊界條件之反算問題

- 正算問題：

在已知的邊界上任何一部分之邊界條件（含勢位與勢位導微），兩者之一必有一個為已知條件。

- 反算問題：

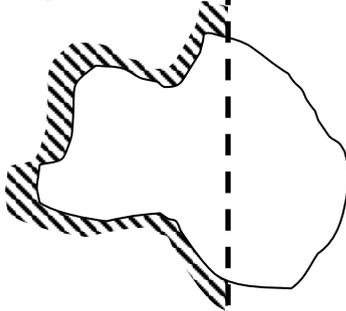
給過定邊界條件之反算問題。這種問題是在已知的邊界上分有兩種邊界形式，第一種邊界是完全沒有任何之邊界條件，第二種邊界是給過定之邊界條件（含勢位與勢位導微）。

圖示

■ 正算問題(well-posed)

$$u = \bar{u}$$

$$t = ?$$



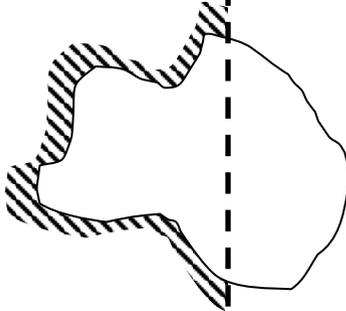
$$u = ?$$

$$t = \bar{t}$$

■ 反算問題(ill-posed)

$$u = \bar{u}$$

$$t = \bar{t}$$



$$u = ?$$

$$t = ?$$

矩陣操作(well-posed)

$$[U]\{\tilde{t}\} = [T]\{\tilde{u}\}$$

$$\begin{bmatrix} A_U & B_U \\ C_U & D_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ \bar{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix}$$

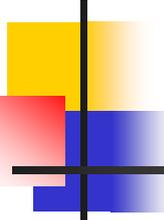
$$\begin{bmatrix} B_T & -A_U \\ D_T & -C_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_U & -A_T \\ D_U & -C_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{u} \end{bmatrix}$$

矩陣操作(ill-posed)

$$[U]\{\tilde{t}\} = [T]\{\tilde{u}\}$$

$$\begin{bmatrix} A_U & B_U \\ C_U & D_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_U & -B_T \\ D_U & -D_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & -A_U \\ C_T & -C_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{t} \end{bmatrix}$$



線性代數

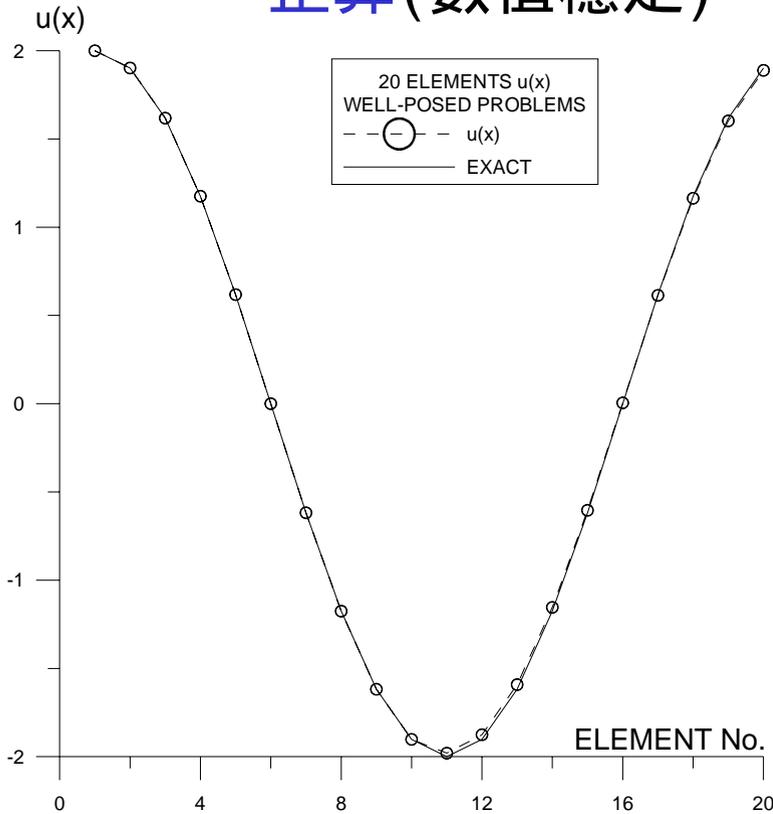
■化簡為

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

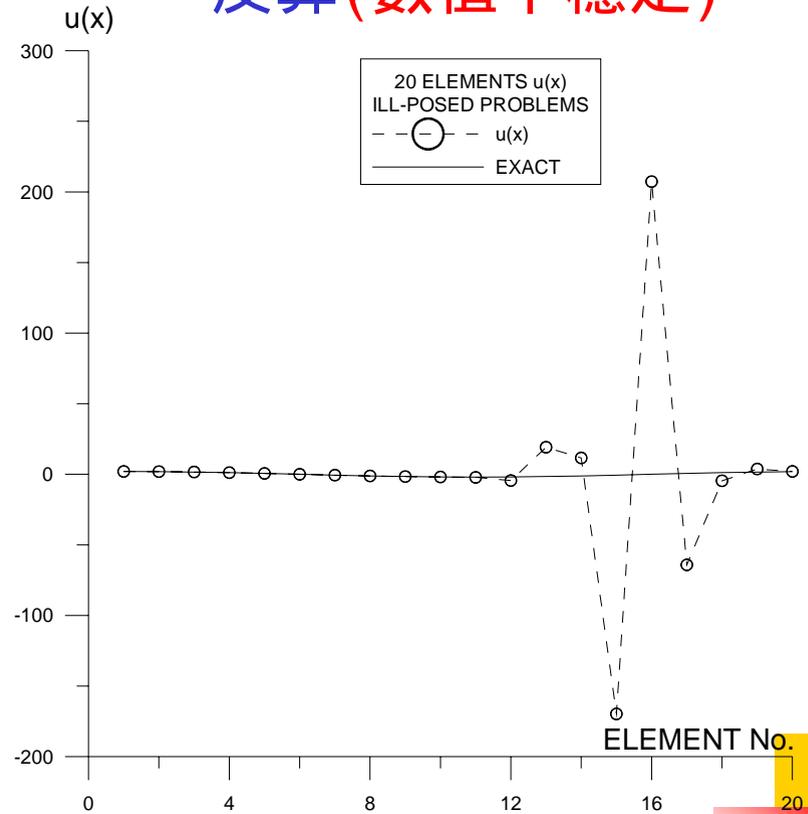
反算問題會造成矩陣病態行為，正算則無此情形

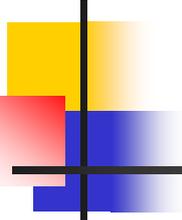
正算及反算問題

正算 (數值穩定)



反算 (數值不穩定)



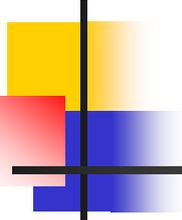


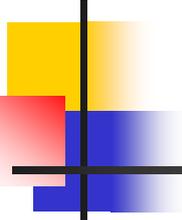
正規化技巧

$$A\tilde{x} = \tilde{b}$$

以一近似的良態矩陣 A' 來取代原系統的 A 矩陣，來求得近似之合理解

$$A'\tilde{x} = \tilde{b}$$

- 
-
- 邊界元素法
 - 四種邊界元素法之比較
 - 反算問題
 - 正規化方法(TSVD + L curve)
 - 數值結果
 - 結論



奇異值分解法

- 奇異值分解法

(singular value decomposition)

$$[A]_{m \times n} = [\Phi]_{m \times m} [\Sigma]_{m \times n} [\Psi]^T_{n \times n}$$

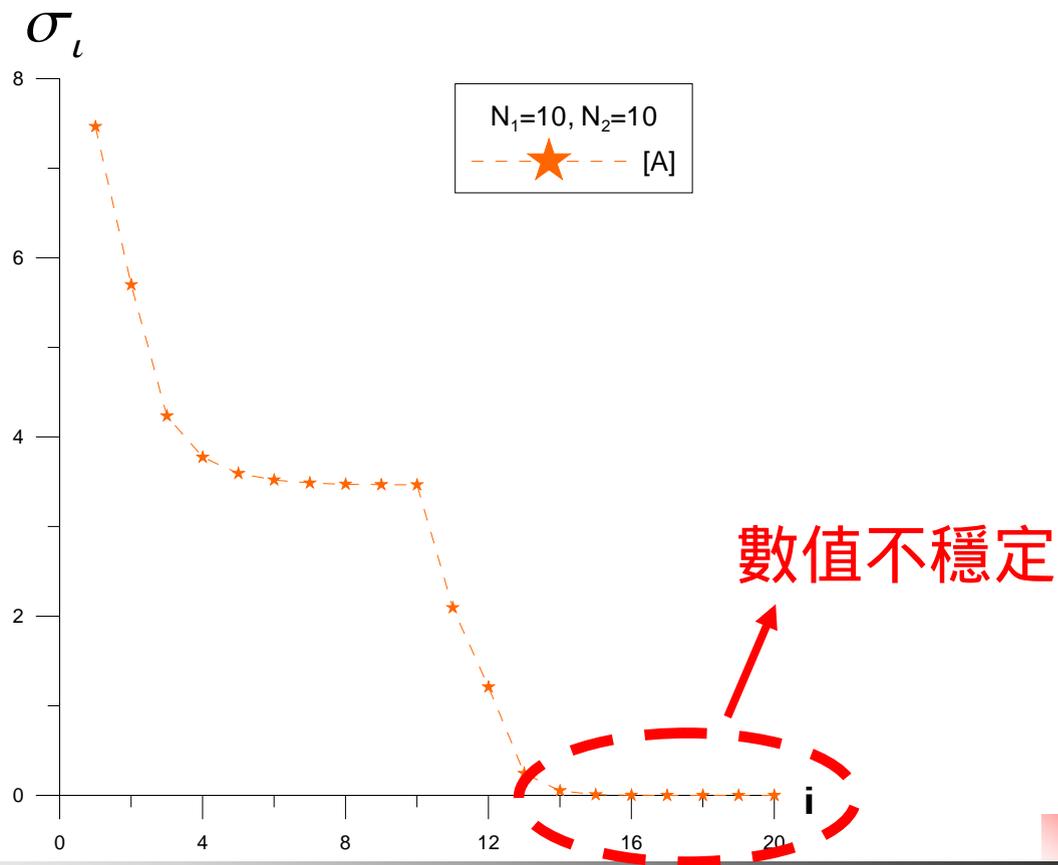
奇異值分解法

- 對角矩陣

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

- 酉矩陣 $[\Phi]_{m \times m}$, $[\Psi]_{n \times n}$

病態矩陣



奇異值分解法

- 原系統

$$A = \Phi \Sigma \Psi^T = \sum_{i=1}^N \phi_i \sigma_i \psi_i^T$$

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^N \frac{\phi_i^T \tilde{b}}{\sigma_i} \psi_i$$

奇異值分解法

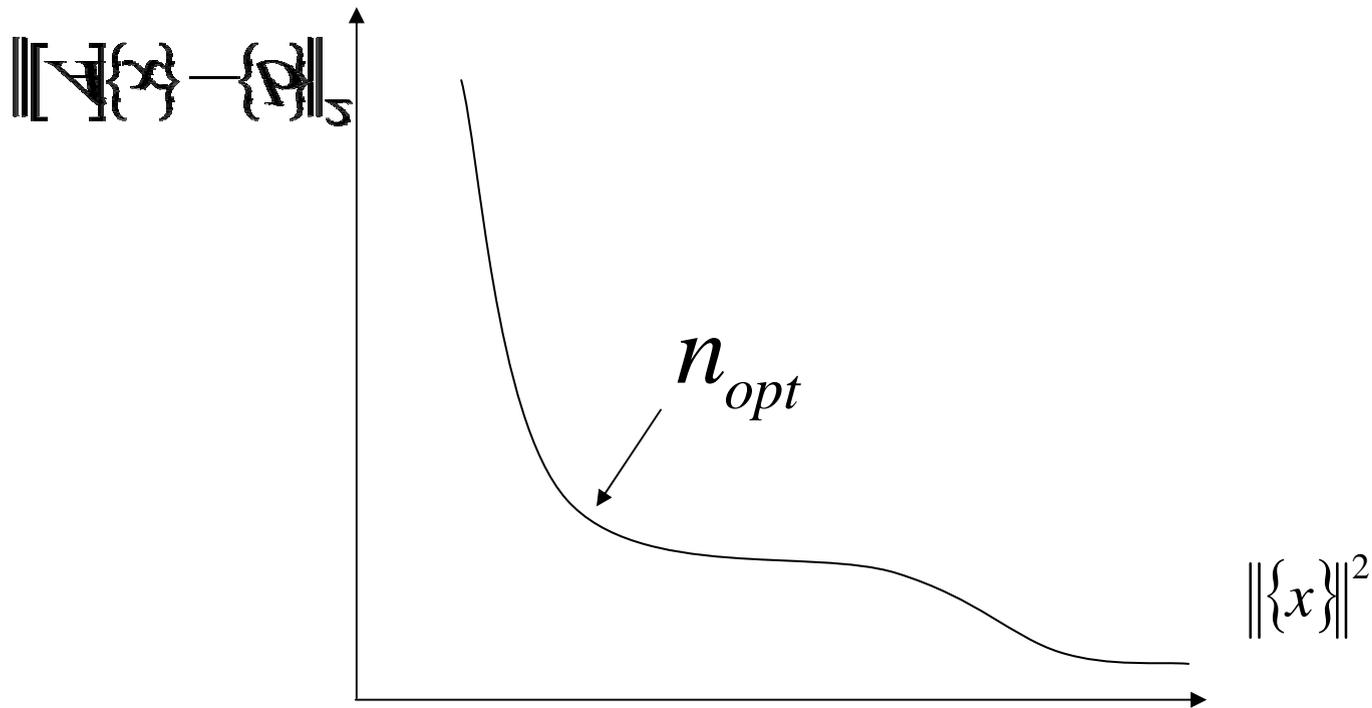
- 正規化系統

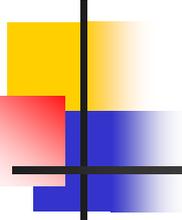
$$A' = \sum_{i=1}^n \phi_i \sigma_i \psi_i^T, n \leq N$$

$$\tilde{x}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i^T \tilde{b}}{\sigma_i} \psi_i, n \leq N$$

L曲線

- 滿足 $\min \|\tilde{x}^{(n)}\|^2$ 及 $\|A\tilde{x}^{(n)} - \tilde{b}\| \leq \varepsilon$



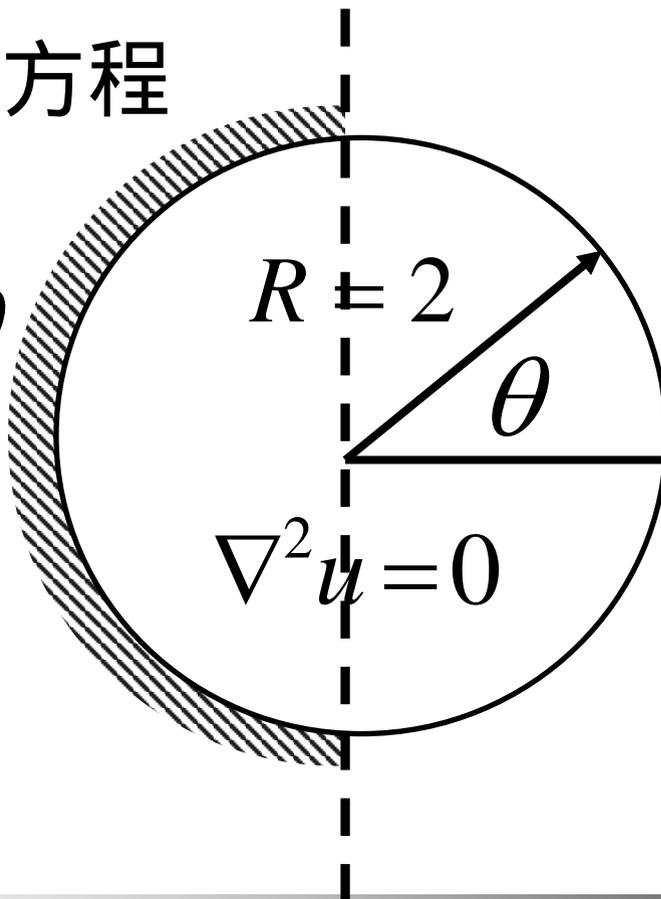
- 
-
- 邊界元素法
 - 四種邊界元素法之比較
 - 反算問題
 - 正規化方法(TSVD + L curve)
 - 數值結果
 - 結論

反算問題

- 拉普拉斯方程

$$u = R \sin \theta$$

$$t = \sin \theta$$

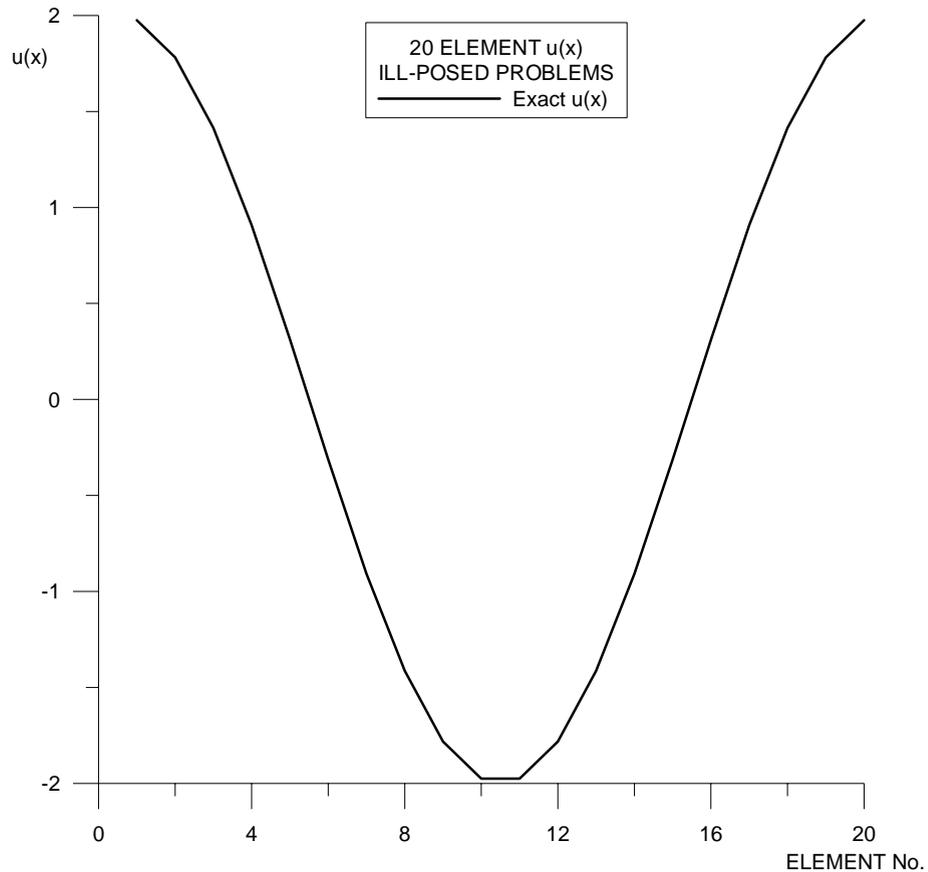
 N_1 

$$u = ?$$

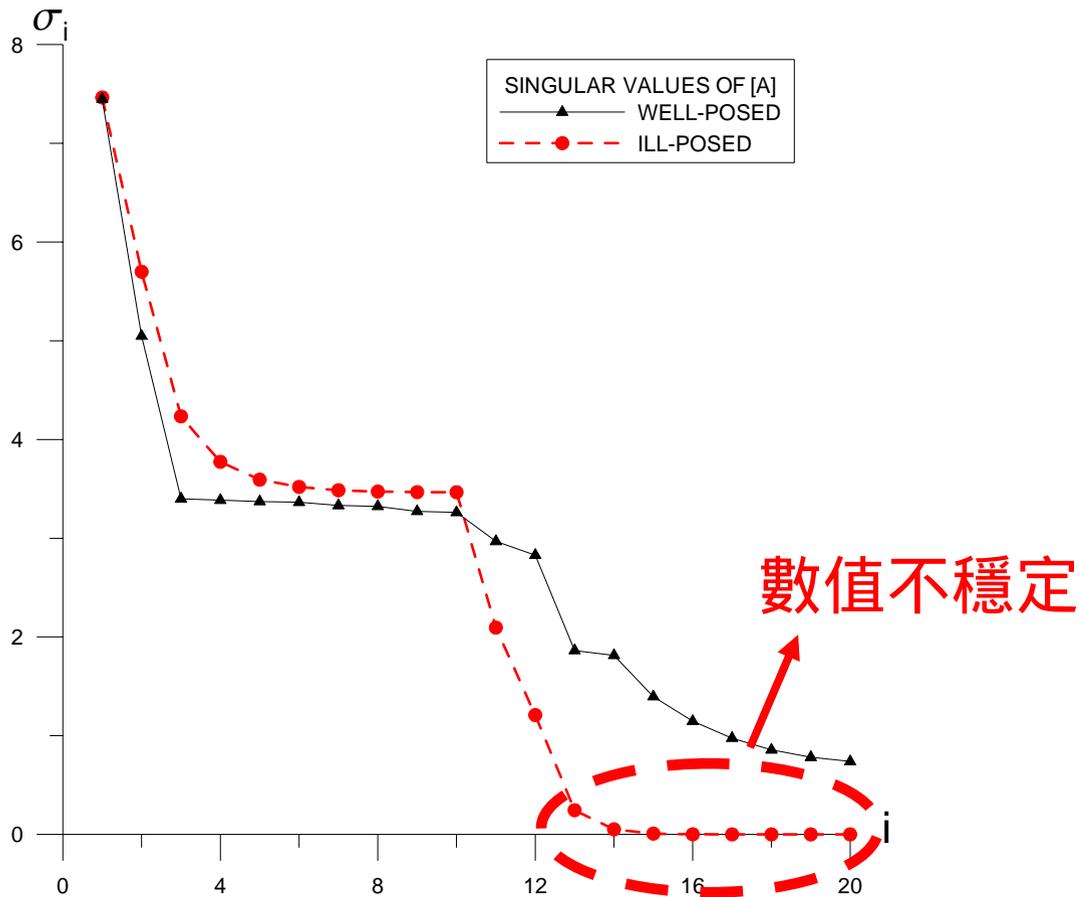
$$t = ?$$

 N_2

解析解

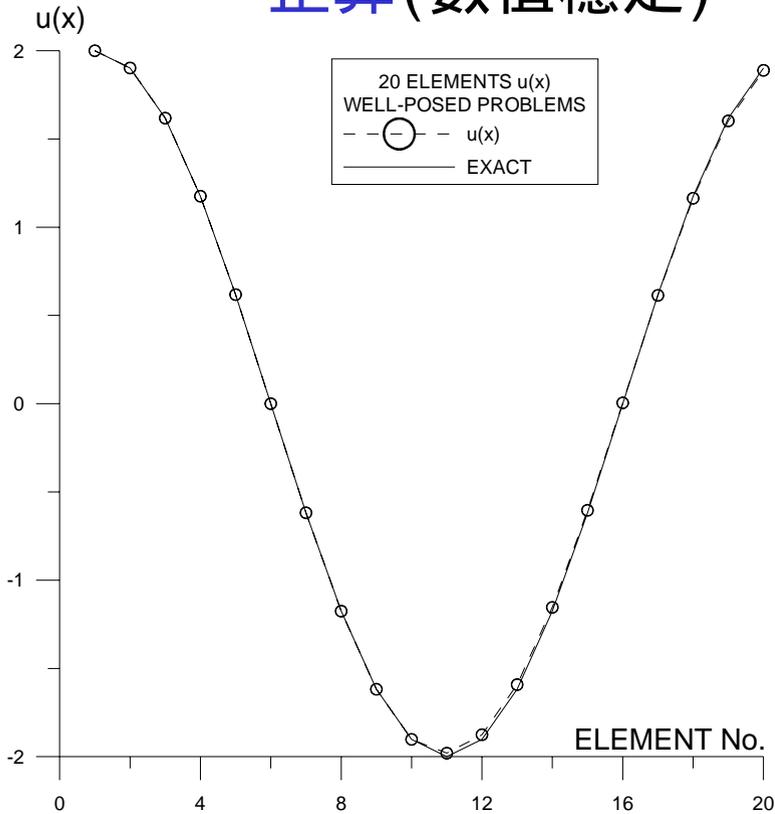


奇異值 ($N_1=10, N_2=10$)

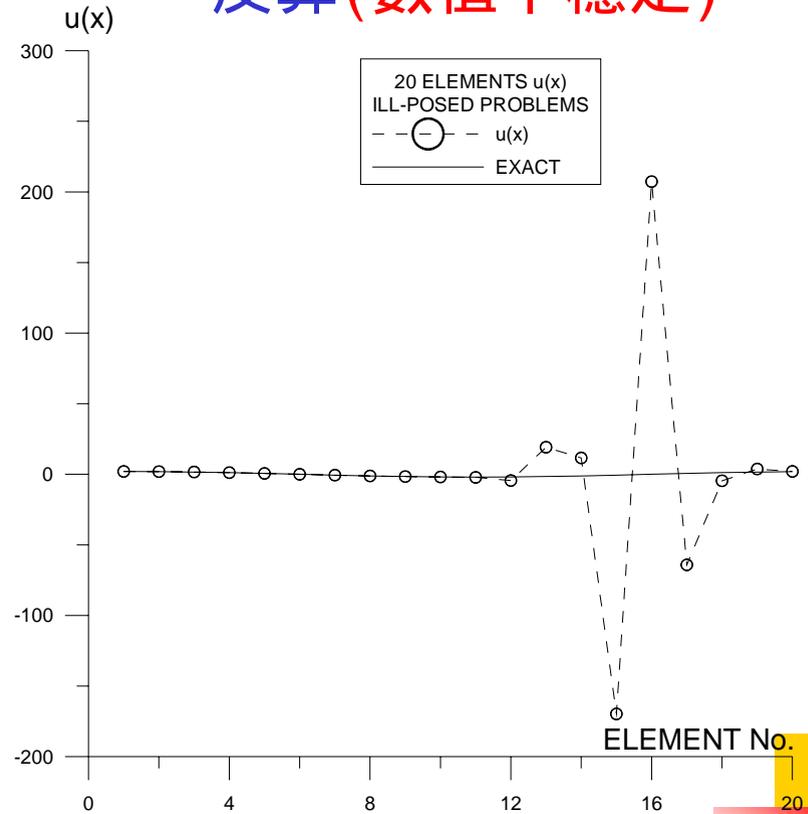


正算及反算問題

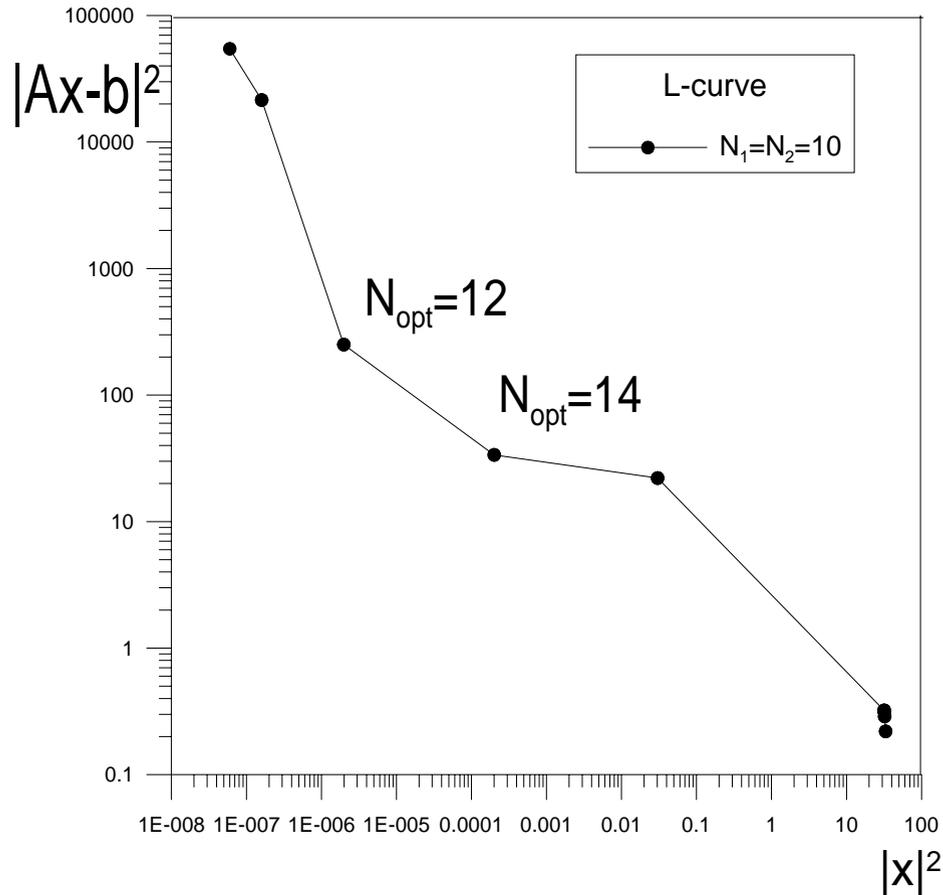
正算 (數值穩定)



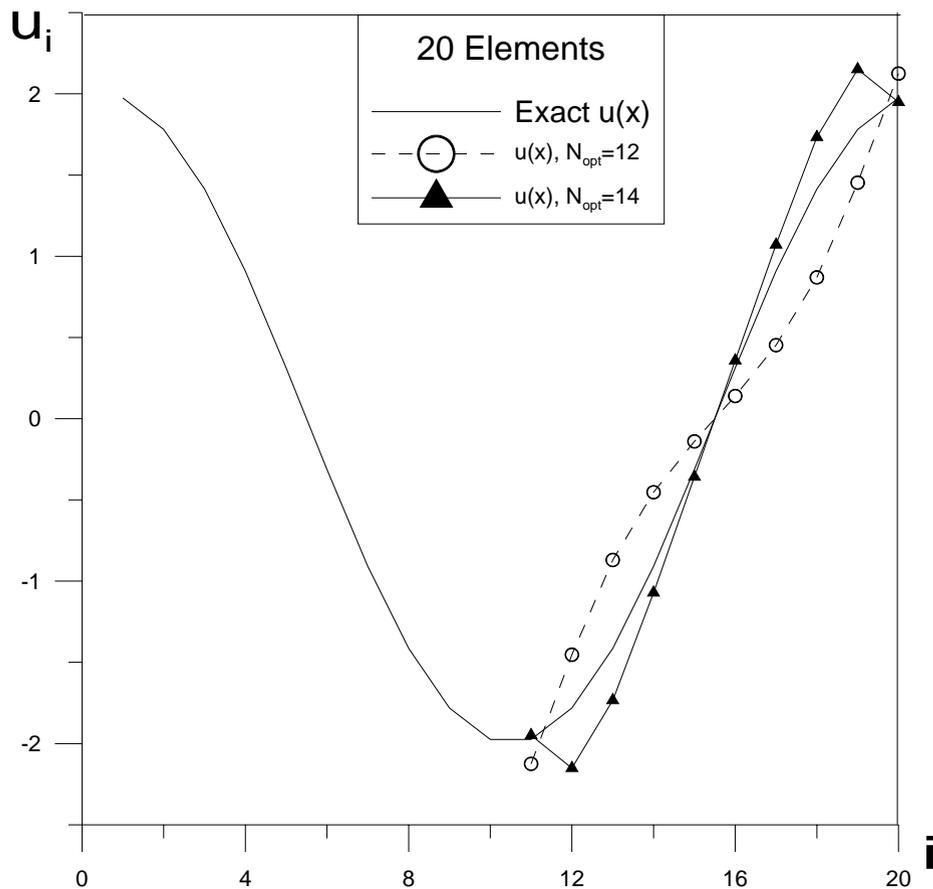
反算 (數值不穩定)



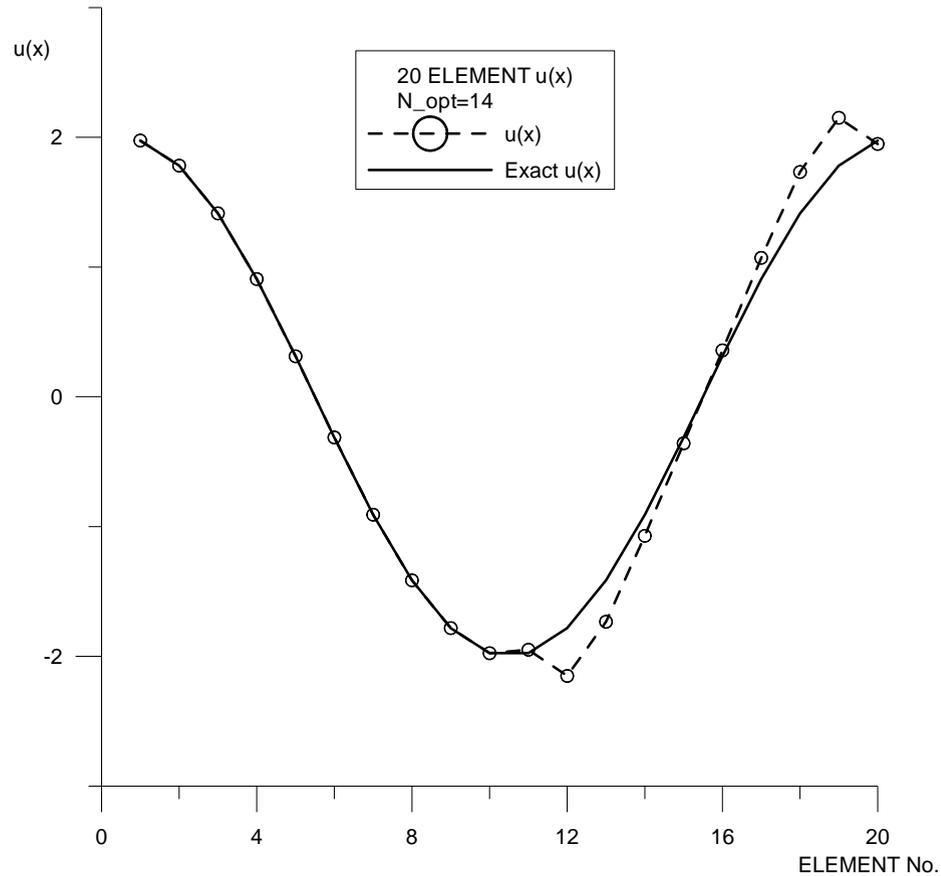
L曲線



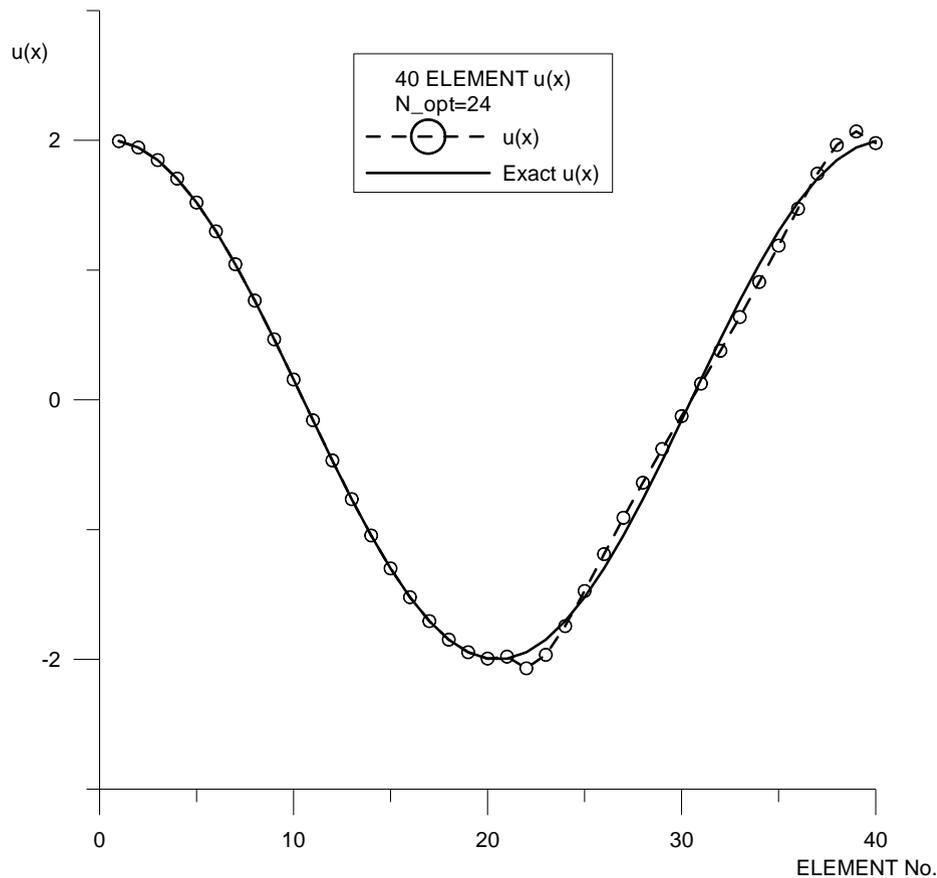
不同 N_{opt} 之比較



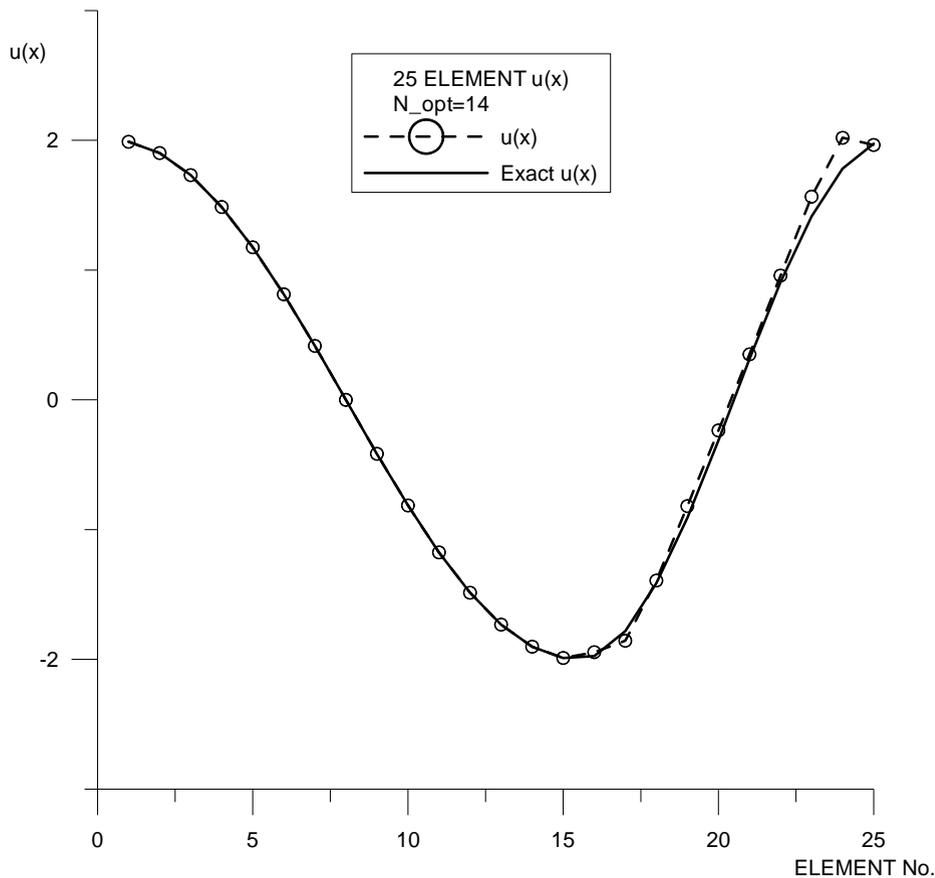
$N_1=10, N_2=10$



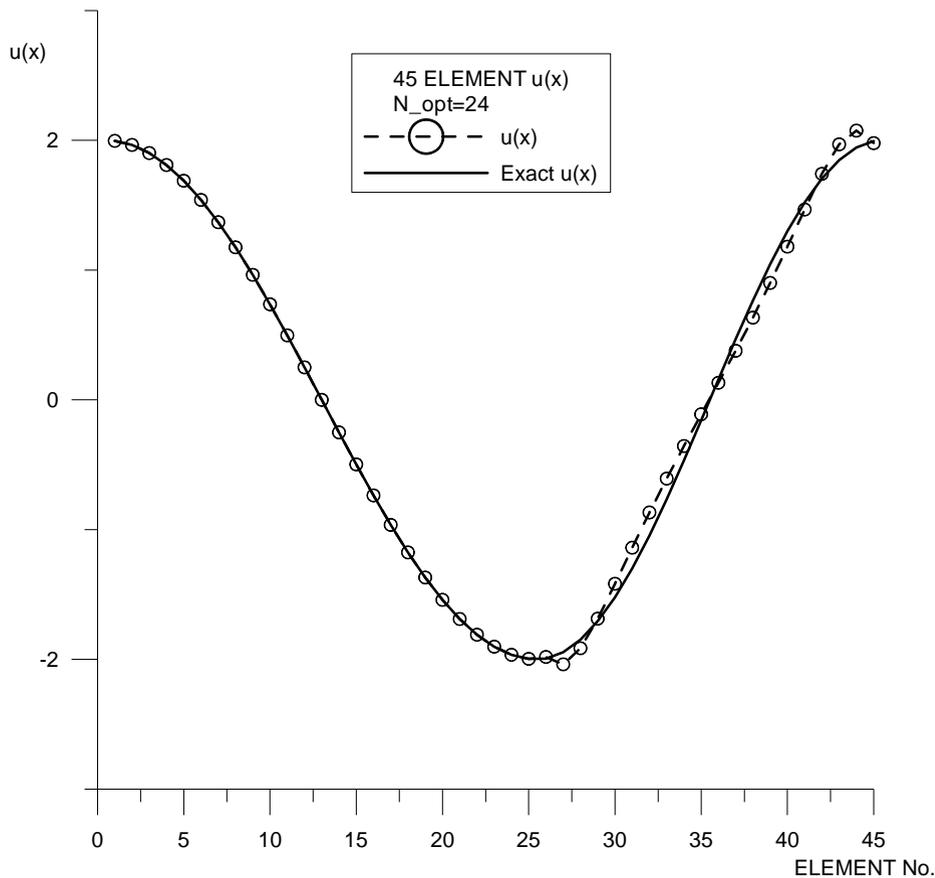
$N_1=20, N_2=20$

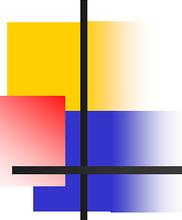


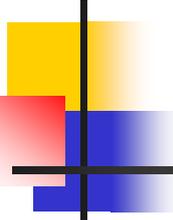
$N_1=15, N_2=10$



$N_1=25, N_2=20$

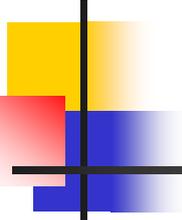


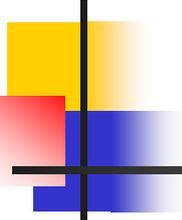
- 
-
- 邊界元素法
 - 四種邊界元素法之比較
 - 反算問題
 - 正規化方法(TSVD + L curve)
 - 數值結果
 - 結論



結論

- 利用「退化核」及「循環矩陣」特性,成功推導出各影響係矩陣之奇異值進而得到條件數,並與數值結果十分吻合。
- 由正算問題之各種BEM方法中係數矩陣之條件數,可得知隨著元素增多,其矩陣之條件數增大,矩陣行為越病態。
- 成功使用「邊界元素法」並採用「奇異值分解法」與「L-曲線」的方法及觀念來克服反算問題之病態行為,得到合理之結果。

- 
- 使用邊界元素法時求解反算問題時，在邊界所分佈的元素數目 ($N_1=N_2$) 增多時，可獲得較佳之逼近的合理解。
 - 若在給定足夠之已知邊界條件下，已知邊界條件之分佈元素個數 (N_1) 增多時，亦可獲得較佳之逼近的合理解。



報告完畢
請多指教