

第十三屆中國造船暨輪機工程研討會  
邊界元素法求解內域假根與外域虛擬波數的  
理論探討與數值研究

陳義麟\*，陳正宗，郭世榮

\*國立高雄海洋技術學院造船工程系 講師  
國立台灣海洋大學河海工程研究所 教授

陽明山，台北  
2001年2月16日



## 邊界元素法解外域輻射及散射問題的方法：

- 奇異積分方程(UT)，超奇異積分方程(LM)。
- CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation)法(1968)，以邊界積分方程式合併域內點積分方程式，來去除虛擬頻率。
- Burton & Miller (1971) 提出合併奇異積分方程式與超奇異積分方程式的方法。

## 虛擬頻率（虛擬波數）產生的原因：

採用邊界元素法，因秩數不足而產生虛擬頻率，在數學本質上則為0/0的問題。



## 邊界元素法解內域特徵值的方法：

- 複數邊界元素法，基本解為複數型。矩陣維度(120\*60)
- De Mey採用實數部或虛數部邊界元素法，（1977）。矩陣維度(60\*60)，有假根但未發現。
- 葉為忠等以對偶多倒易法配合SVD技巧，過濾假根（1999）。矩陣維度(120\*60)
- 陳正宗等以對偶實數部邊界元素法配合SVD技巧，過濾假根（1999）。矩陣維度(120\*60)。
- 陳義麟等以實數部邊界元素CHEEF法配合SVD技巧，過濾假根（2001）。矩陣維度(62\*60)

## 假根(spurious eigensolution)產生的原因：

採用實數部（虛數部）邊界元素法，缺少虛數部（實數部）的束制，因此秩數不足產生假根。



## 解析方法：

- 1.採用退化核函數(degenerate kernel function)。
- 2.圓形循環矩陣特性(circulants)。
- 3.奇異值分解法(Singular Value Decomposition)



控制方程式為

$$\Delta \nabla^2 u + k^2 u = 0$$

其中  $u$  為速度勢位， $D$  為問題的定義域， $k$  為波數

$k = \omega / c$ ， $\omega$  為角頻率， $c$  為聲速。



域外點積分方程為

$$0 = \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - \int_B U(s, x) t(s) dB(s), x \in D^e$$

$$0 = \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - \int_B L(s, x) t(s) dB(s), x \in D^e$$

其中  $u$  為速度勢位， $B$  為問題的邊界， $U(x, s)$  為基本解

$$t(s) = \frac{\partial u(s)}{\partial n_s}, \quad T(s, x) \equiv \frac{\partial U}{\partial n_s}, \quad L(s, x) \equiv \frac{\partial U}{\partial n_x}, \quad M(s, x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial n_s \partial n_x}。$$

若為二維時，核函數(基本解)為

$$U(s, x) = \frac{-i\pi H_0^{(1)}(kr)}{2}$$

其中， $H_0^{(1)}(kr)$  表示第一類 0 階 Hankel 函數， $r$  為場點與源點之間的距離。



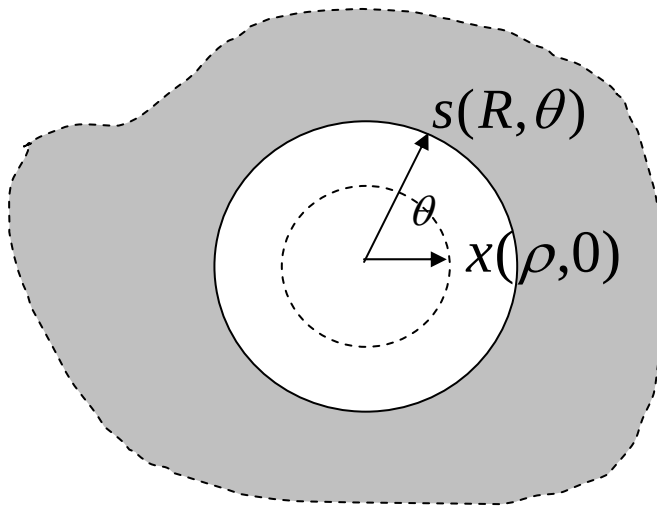
## 退化核函數

$$U(s, x) = \begin{cases} U^i(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\pi}{2} [-iJ_n(kR) + Y_n(kR)] J_n(k\rho) \cos(n\theta), R > \rho \\ U^e(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\pi}{2} [-iJ_n(k\rho) + Y_n(k\rho)] J_n(kR) \cos(n\theta), R < \rho \end{cases}$$

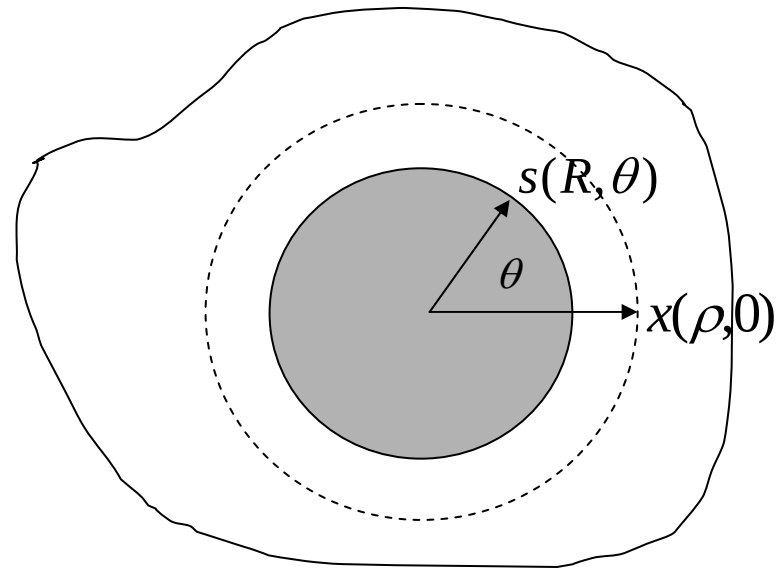
$$T(s, x) = \begin{cases} T^i(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{k\pi}{2} [-iJ'_n(kR) + Y'_n(kR)] J_n(k\rho) \cos(n\theta), R > \rho \\ T^e(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{k\pi}{2} [-iJ_n(k\rho) + Y_n(k\rho)] J'_n(kR) \cos(n\theta), R < \rho \end{cases}$$

$$L(s, x) = \begin{cases} L^i(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{k\pi}{2} [-iJ_n(kR) + Y_n(kR)] J'_n(k\rho) \cos(n\theta), R > \rho \\ L^e(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{k\pi}{2} [-iJ'_n(k\rho) + Y'_n(k\rho)] J_n(kR) \cos(n\theta), R < \rho \end{cases}$$

$$M(s, x) = \begin{cases} M^i(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{k^2\pi}{2} [-iJ'_n(kR) + Y'_n(kR)] J'_n(k\rho) \cos(n\theta), R > \rho \\ M^e(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{k^2\pi}{2} [-iJ'_n(k\rho) + Y'_n(k\rho)] J'_n(kR) \cos(n\theta), R < \rho \end{cases}$$



The definitions of  $\rho$ ,  $R$  and  $\theta$ , for **exterior** problem using direct method.



The definitions of  $\rho$ ,  $R$  and  $\theta$ , for **interior** problem using direct method.

## 圓形循環矩陣

沿半徑  $\rho$  的虛擬邊界上分佈  $2N$  個場點對半徑  $R$  的真實邊界做排序可得：

$$[G] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2N-1} \\ a_{2N-1} & a_0 & \cdots & a_{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

$G$  是  $U^i, U^e, T^i, T^e, L^i, L^e, M^i$  或  $M^e$



$\det[G]$ 爲：

$$\det[U^i] = \lambda_0 \lambda_N (\lambda_1 \cdots \lambda_{N-1}) (\lambda_{-1} \cdots \lambda_{-(N-1)})$$

$$\det[U^e] = \lambda_0 \lambda_N (\lambda_1 \cdots \lambda_{N-1}) (\lambda_{-1} \cdots \lambda_{-(N-1)})$$

$$\det[T^e] = \mu_0 \mu_N (\lambda \mu \cdots \mu_{N-1}) (\mu_{-1} \cdots \mu_{-(N-1)})$$

$$\det[L^i] = \mu_0 \mu_N (\lambda \mu \cdots \mu_{N-1}) (\mu_{-1} \cdots \mu_{-(N-1)})$$

$$\det[T^i] = \nu_0 \nu_N (\nu_1 \cdots \nu_{N-1}) (\nu_{-1} \cdots \nu_{-(N-1)})$$

$$\det[L^e] = \nu_0 \nu_N (\nu_1 \cdots \nu_{N-1}) (\nu_{-1} \cdots \nu_{-(N-1)})$$

$$\det[M^i] = k_0 k_N (k_1 \cdots k_{N-1}) (k_{-1} \cdots k_{-(N-1)})$$

$$\det[M^e] = k_0 k_N (k_1 \cdots k_{N-1}) (k_{-1} \cdots k_{-(N-1)})$$

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(N-1), N$$



$$\lambda_l = \pi^2 \rho (-iJ_l(k\rho) + Y_l(k\rho))J_l(k\rho),$$

$$\mu_l = \pi^2 k\rho (-iJ_l(k\rho) + Y_l(k\rho))J'_l(k\rho),$$

$$\nu_l = \pi^2 k\rho (-iJ'_l(k\rho) + Y'_l(k\rho))J_l(k\rho),$$

$$k_l = \pi^2 k^2 \rho (-iJ'_l(k\rho) + Y'_l(k\rho))J'_l(k\rho).$$

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm (N-1), N.$$



## 外域問題

考慮外域輻射 $\textbf{Dirichlet}$ 問題,即  $u = \bar{u}$

### 1. $UT$ 法

$$[U]\{t\} = [T]\{\bar{u}\} = \{q_1\}.$$

虛擬頻率產生於  $k$  滿足於下列方程式的位置

$$(-iJ_l(k\rho) + Y_l(k\rho))J_l(k\rho) = 0$$

因爲  $-iJ_l(k\rho) + Y_l(k\rho) \neq 0$ ,

可知  $J_l(k\rho) = 0$  , 此即爲虛擬頻率產生的位置。



2.LM法,

$$[L]\{t\} = [M]\{\bar{u}\} = \{q_2\}.$$

虛擬頻率產生於  $k$  滿足於下列方程式的位置

$$(-iJ_l(k\rho) + Y_l(k\rho))J_l'(k\rho) = 0$$

因爲  $-iJ_l(k\rho) + Y_l(k\rho) \neq 0$  ,

可知  $J_l'(k\rho) = 0$  , 此即爲虛擬頻率產生的位置。



考慮外域輻射 $Neumann$ 問題,即  $t = \bar{t}$

### 1. $UT$ 法

$$[T]\{u\} = [U]\{\bar{t}\} = \{p_1\}.$$

同理可得

$$(-iJ_l'(k\rho) + Y_l'(k\rho))J_l(k\rho) = 0$$

因爲  $-iJ_l'(k\rho) + Y_l'(k\rho) \neq 0$  ,

可知  $J_l(k\rho) = 0$  , 此即爲虛擬頻率產生的位置。

### 2. $LM$ 法

$$[M]\{u\} = [L]\{\bar{t}\} = \{p_2\}.$$

可得

$$(-iJ_l'(k\rho) + Y_l'(k\rho))J_l'(k\rho) = 0$$

同理可知  $J_l'(k\rho) = 0$  , 此即爲虛擬頻率產生的位置。



# 克服虛擬頻率的方法

## 一、CHIEF法

UT法,

$$\begin{bmatrix} U_{2N \times 2N}^B \\ U_{a \times 2N}^i \end{bmatrix} \{t\} = \begin{bmatrix} T_{2N \times 2N}^B \\ T_{a \times 2N}^i \end{bmatrix} \{u\}$$

配合SVD的技巧可濾除虛擬頻率。

(同理可應用於LM法，及不同邊界條件)



## 二、Burton & Miller 法

以奇異積分方程式與超奇異積分方程式的純虛數倍，

$$[U + \frac{i}{k}L]\{t\} = [T + \frac{i}{k}M]\{u\}$$

可濾除所有的虛擬頻率。



## 內域問題

1. 複數  $UT$ ， $LM$  法，

考慮 **Dirichlet** 問題，即  $u(x) = 0, x \in B$

$$[U]\{t\} = [T]\{u\} = \{0\}.$$

$$[L]\{t\} = [M]\{u\} = \{0\}.$$

可得下列特徵方程式

$$(-iJ_l(k\rho) + Y_l(k\rho))J_l(k\rho) = 0$$

$$(-iJ_l'(k\rho) + Y_l'(k\rho))J_l(k\rho) = 0$$

可得特徵值為  $J_l(k\rho) = 0$  的根。



2. 實數  $UT$  ,  $LM$ 法 ,

考慮 **Dirichlet**問題 , 即  $u(x) = 0, x \in B$

$$[U_R]\{t\} = [T_R]\{u\} = \{0\}.$$

$$[L_R]\{t\} = [M_R]\{u\} = \{0\}.$$

可得下列特徵方程式

$$Y_l(k\rho)J_l(k\rho) = 0$$

$$Y_l'(k\rho)J_l(k\rho) = 0$$

可得真特徵值為  $J_l(k\rho) = 0$  的根 ,

及假特徵值分別為  $Y_l(k\rho) = 0$  及  $Y_l'(k\rho) = 0$  的根 。



3. 虛數  $UT$  ,  $LM$  法 ,

考慮 **Dirichlet** 問題 , 即  $u(x) = 0, x \in B$

$$[U_I]\{t\} = [T_I]\{u\} = \{0\}.$$

$$[L_I]\{t\} = [M_I]\{u\} = \{0\}.$$

可得下列特徵方程式

$$J_l(k\rho)J_l(k\rho) = 0$$

$$J_l'(k\rho)J_l(k\rho) = 0$$

可得真特徵值為  $J_l(k\rho) = 0$  的根 ,

及假特徵值分別為  $J_l(k\rho) = 0$  及  $J_l'(k\rho) = 0$  的根。



# 過濾假根的方法

一、複數BEM

二、對偶實數BEM

$$\begin{bmatrix} U_{2N \times 2N}^B \\ L_{2N \times 2N}^B \end{bmatrix} \{t\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{2N \times 2N}^B \\ M_{2N \times 2N}^B \end{bmatrix} \{u\} = 0$$

配合SVD的技巧可濾除假根。



### 三、CHEEF法

UT法,

$$\begin{bmatrix} U_{2N \times 2N}^B \\ U_{a \times 2N}^e \end{bmatrix} \{t\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{2N \times 2N}^B \\ T_{a \times 2N}^e \end{bmatrix} \{u\} = 0$$

配合SVD的技巧可濾除假根。

(同理可應用於LM法)



## 結論

- 以退化核函數及循環矩陣特性，解析探討外域問題虛擬頻率及內域問題真假特徵值產生的機制。
- 虛擬頻率是因秩數不足產生虛擬頻率，數學本質上為 $0/0$ 的問題。
- 假根產生的原因，是因採用實數部（虛數部）邊界元素法，缺少虛數部（實數部）的束制，因此秩數不足產生假根。
- 因瞭解產生的機制，而可以針對問題提出有效的解決方法。

