

# Applications of dual boundary integral equations to exterior acoustic problems

陳正宗 陳誠宗 陳桂鴻 陳義麟  
海洋大學河海工程研究所

第五屆結構工程研討會 南投溪頭

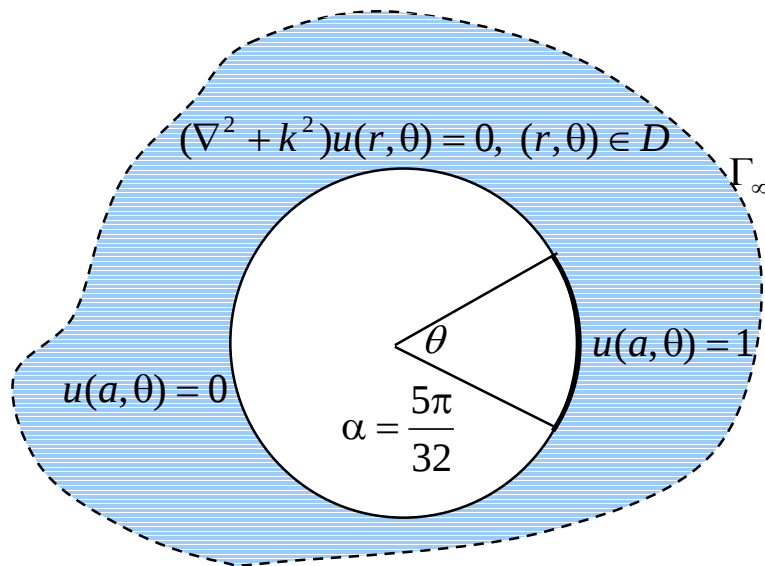
2000年8月30日 10:15-10:45

# 大綱

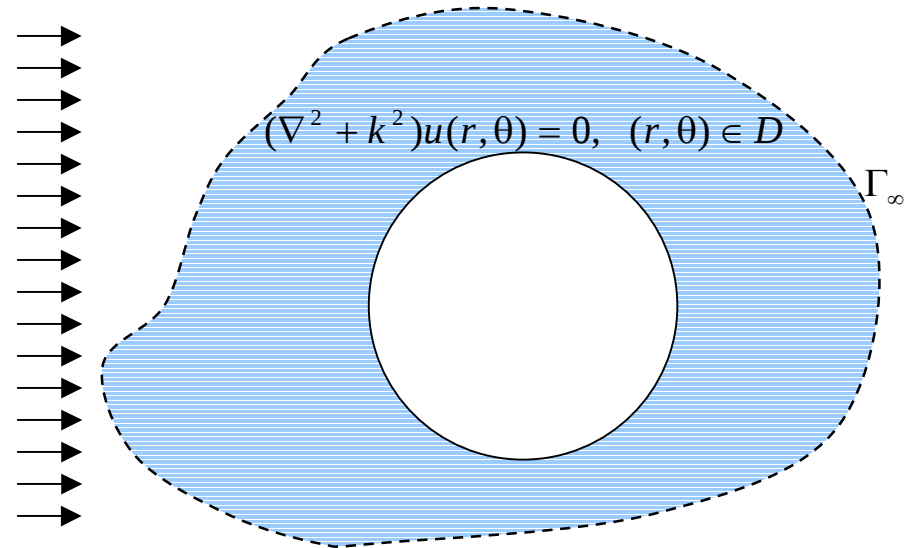
1. 研究動機與目的
2. 輻射與散射問題
3. 虛擬頻率的機制
4. 數值結果與討論
5. 結論

# 問題的描述

## 不均勻輻射問題



## 散射問題



# 研究動機與目的

1. 使用邊界元素法求解外域聲場輻射與散射問題
2. 瞭解虛擬頻率發生的機制
3. 解決BEM數值不穩定( $0/0$ )的問題

# 方法介紹

## 1. 邊界元素法(UT式或LM式)

$$2\pi u(\mathbf{x}) = \int_B \{T(\mathbf{s}, \mathbf{x})u(\mathbf{s}) - U(\mathbf{s}, \mathbf{x})t(\mathbf{s})\}dB(\mathbf{s})$$

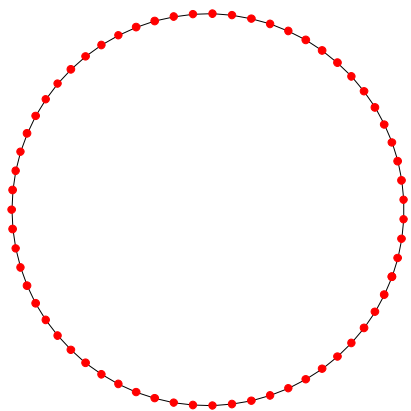
$$2\pi t(\mathbf{x}) = \int_B \{M(\mathbf{s}, \mathbf{x})u(\mathbf{s}) - L(\mathbf{s}, \mathbf{x})t(\mathbf{s})\}dB(\mathbf{s})$$

## 2. Burton 與Miller法 → 解決虛擬頻率

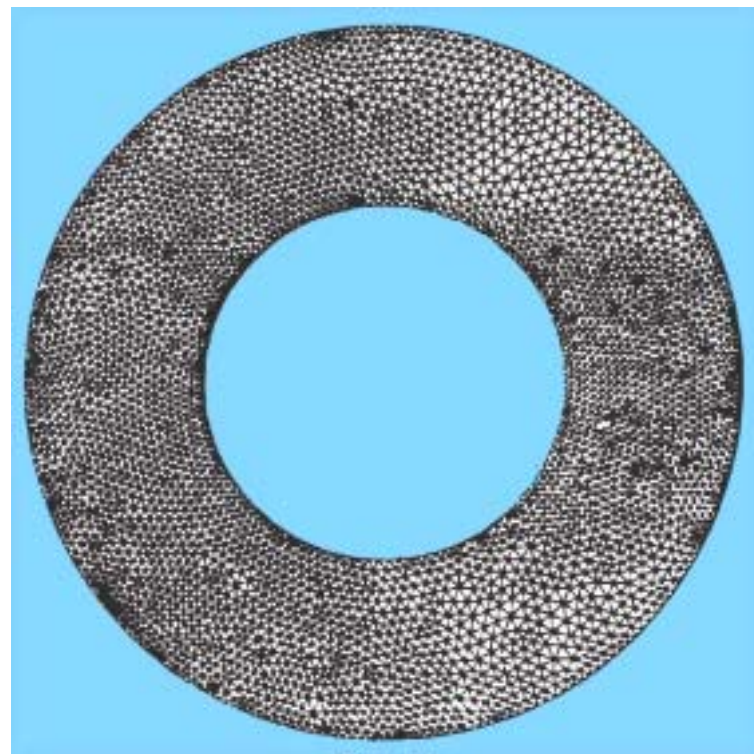
$$\left[U + \frac{i}{k}L\right] \tilde{t} = \left[T + \frac{i}{k}M\right] \tilde{u}$$

# 元素切割方式

邊界元素法

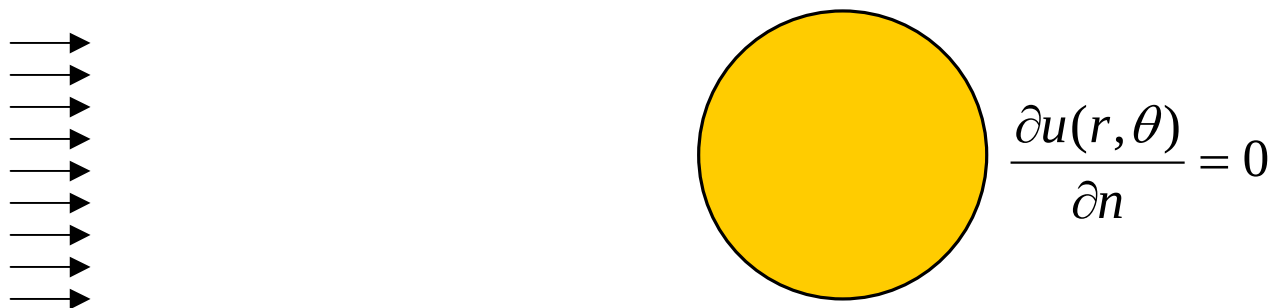


有限元素法

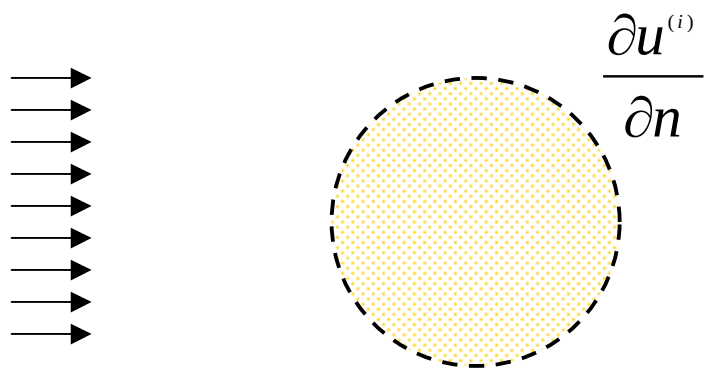


# 散射疊加原理：剛性圓柱體

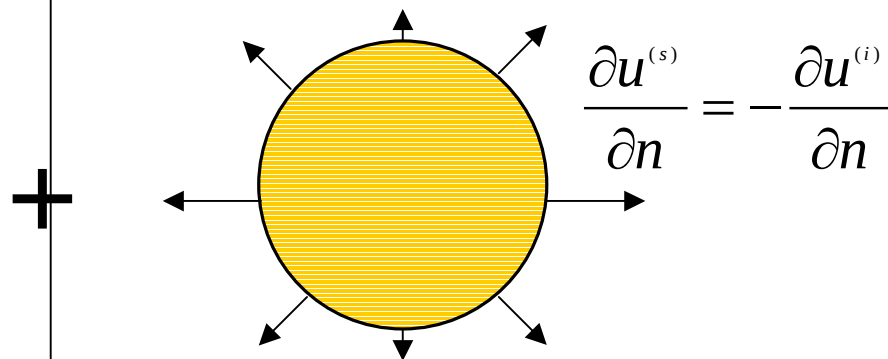
$$u(r, \theta) = u^{(i)}(r, \theta) + u^{(s)}(r, \theta)$$



$$u^{(i)}(r, \theta) = e^{ikr \cos \theta}$$



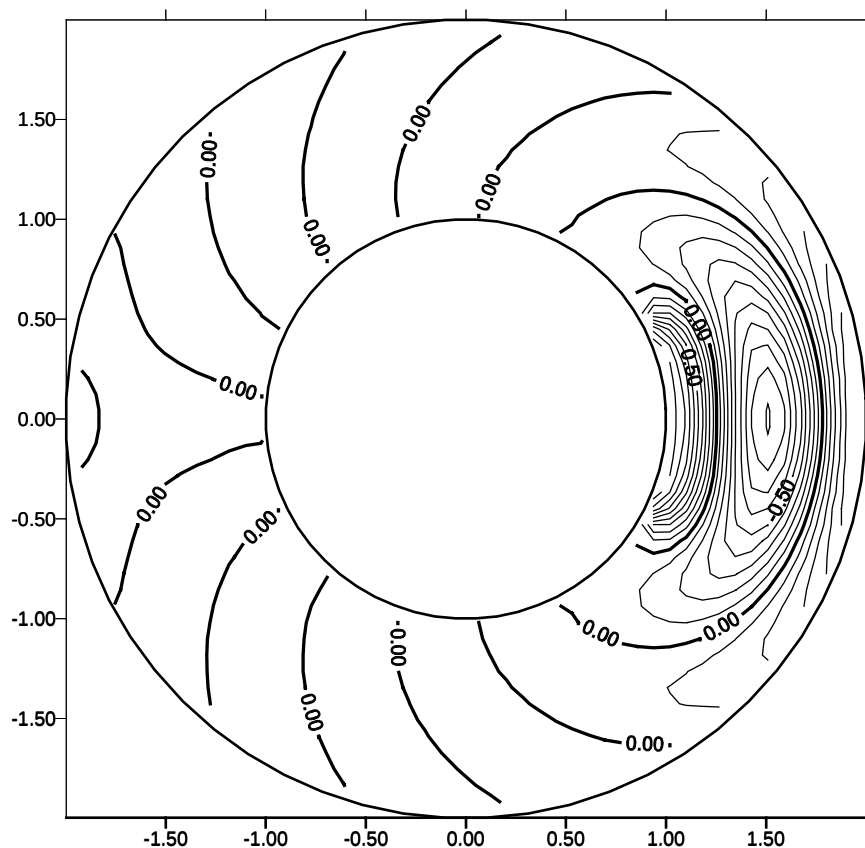
$$u^{(s)}(r, \theta)$$



# 不均勻輻射場： Dirichlet problem $ka = 2\pi$

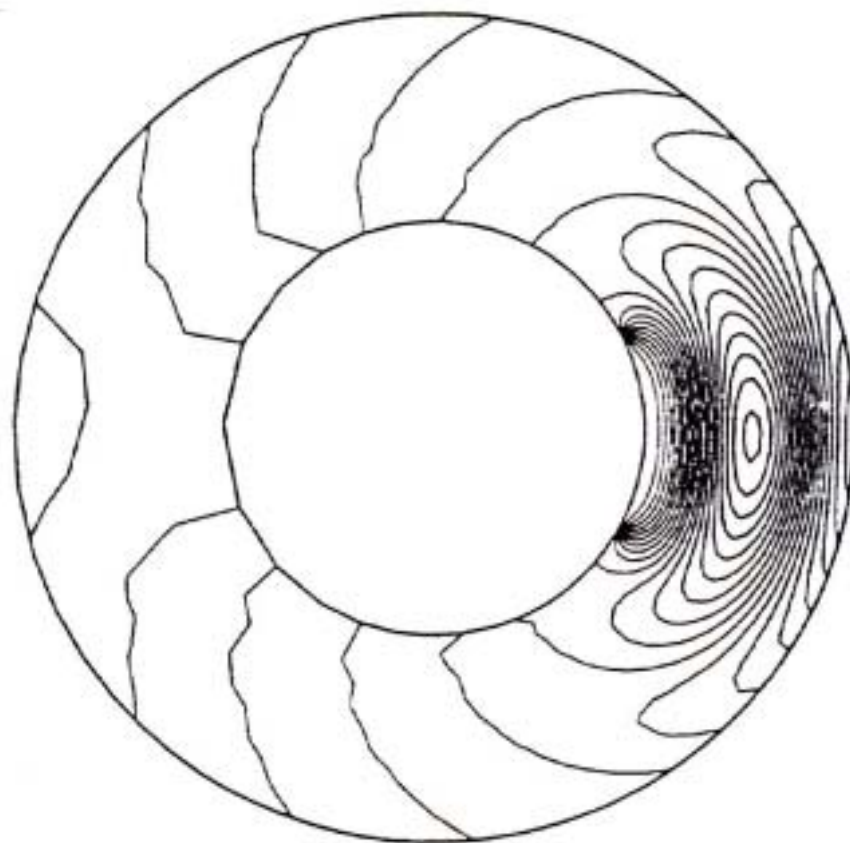
Numerical solution: **BEM**

**64** ELEMENTS



Numerical solution: **FEM**

**2791** ELEMENTS

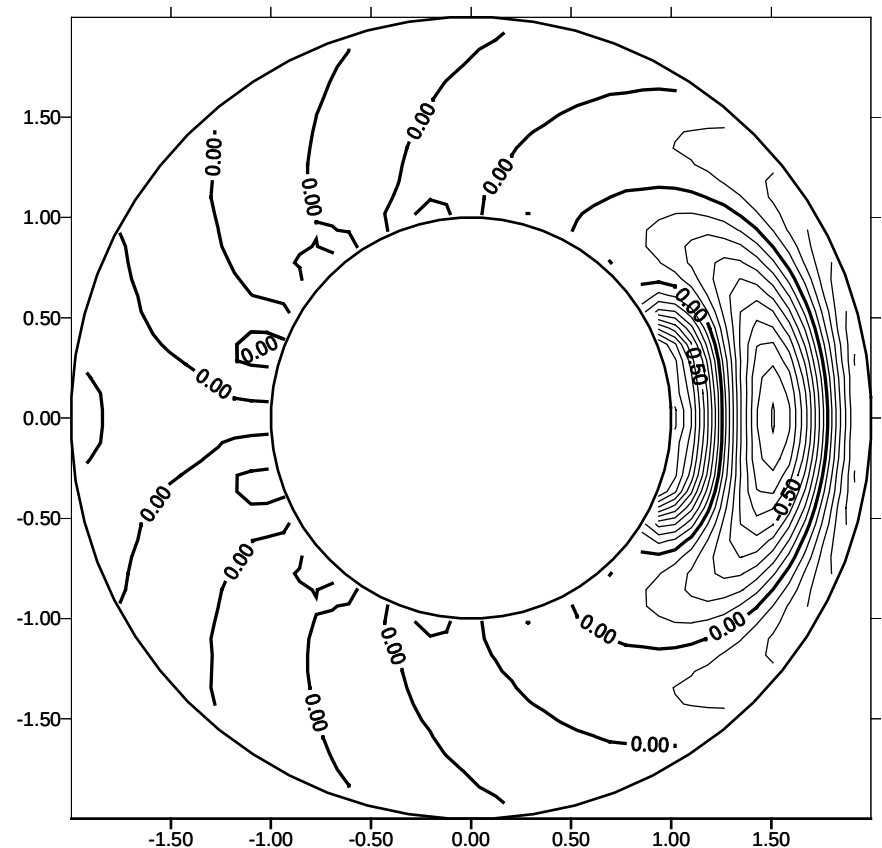
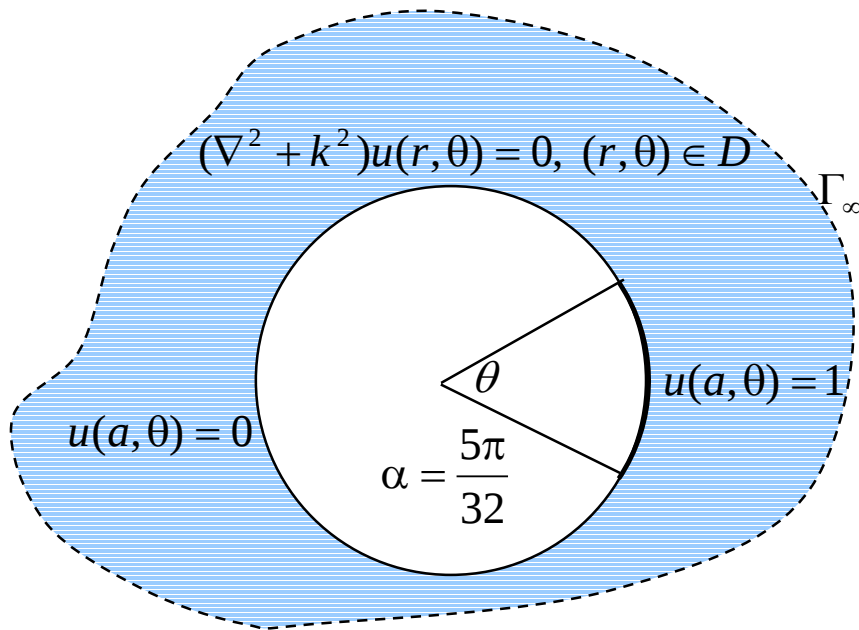


# 不均勻輻射場：Dirichlet problem

**Analytical solution: n=20**

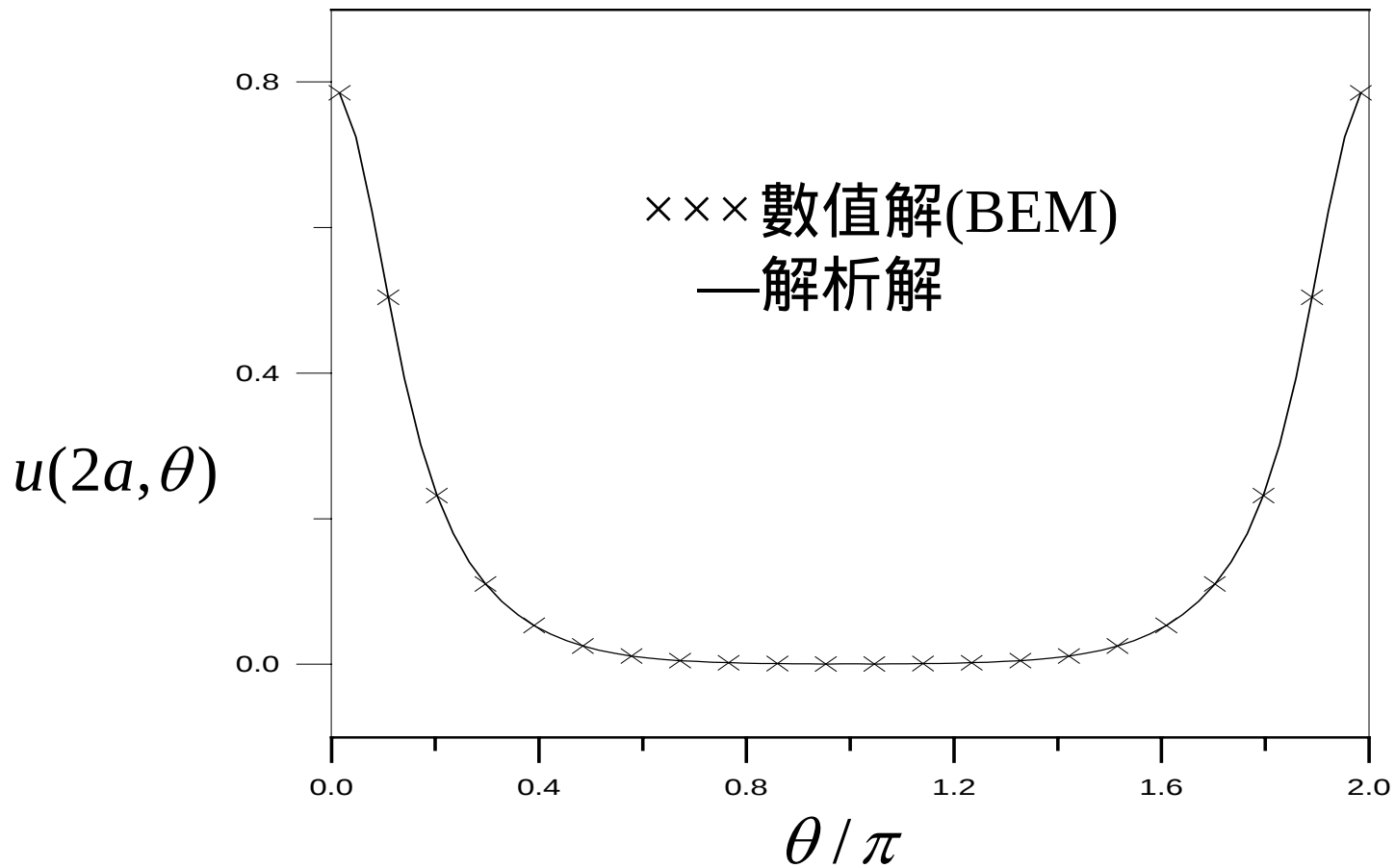
$$ka = 2\pi$$

$$u(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(ka)} \cos n\theta$$



# 不均勻輻射場：Dirichlet problem

$$ka = 2\pi$$



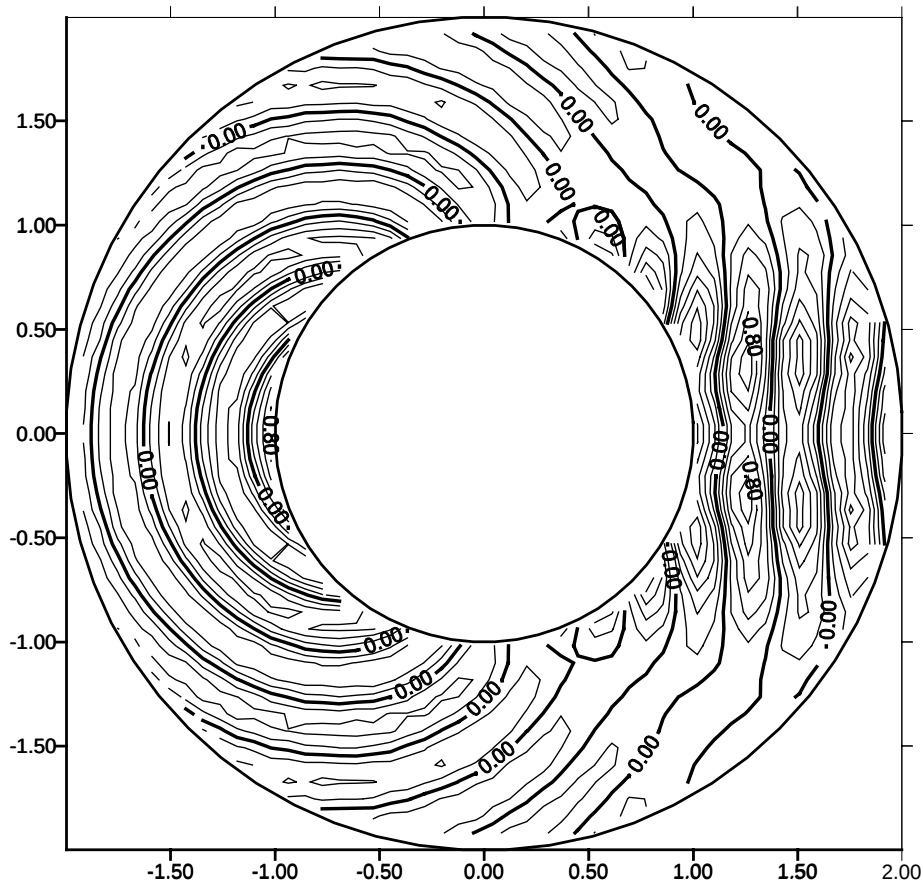
$u(2a, \theta)$  對  $\theta / \pi$  作圖

# 散射 : Neumann problem

$$ka = 4\pi$$

Numerical solution: **BEM**

**63** ELEMENTS



Numerical solution: **FEM**

**7816** ELEMENTS

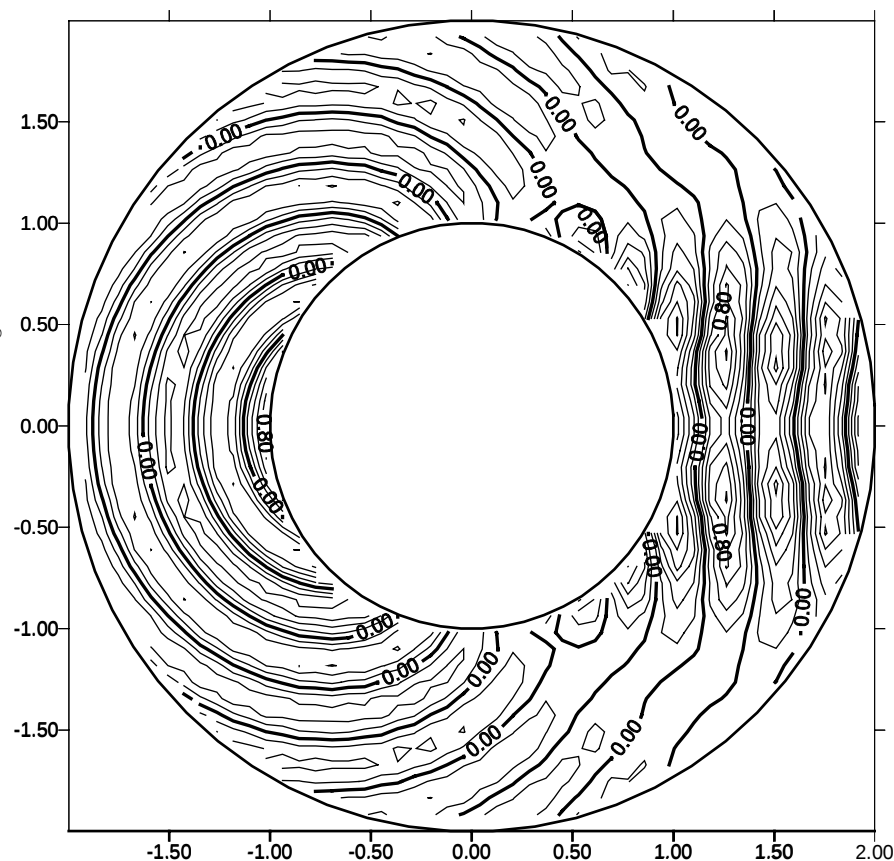
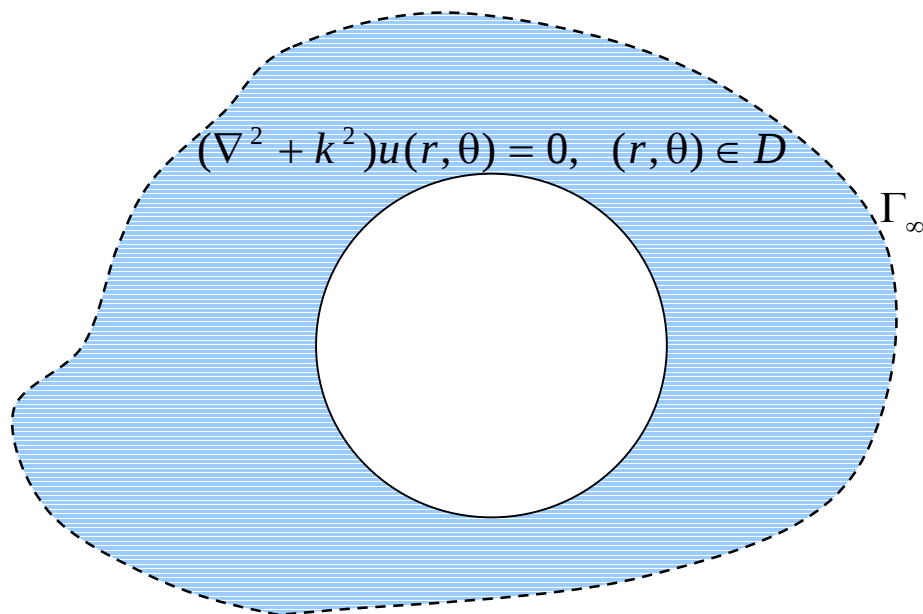


# 散射 : Neumann problem

Analytical solution:  $n=20$

$$ka = 4\pi$$

$$u(r, \theta) = -\frac{J_0'(ka)}{H_0^{(1)'}(ka)} H_0^{(1)}(kr) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(kr) \cos n\theta$$



虛擬頻率發生的機制：

$$U(s, x) = -\frac{i\pi H_0(kr)}{2}$$

$$u(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

$$t(\theta) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta$$

$$U^i(R, \theta, \rho, \phi) = \sum'_{n=0}^{\infty} \pi [H'_m(kR)] J_m(k\rho) \cos(m(\theta - \phi)), \quad R > \rho$$

$$T^i(R, \theta, \rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi H'_m(kR) J_m(k\rho) \cos(m(\theta - \phi)), \quad R > \rho$$

$$0 = \int_B T^i(s, x) u(s) dB(s) - \int_B U^i(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in B$$

透過正交關係，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \pi \delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

**Dirichlet problem** : 給定  $a_0, a_n, b_n$

$$Ut = \bar{T}u \Rightarrow t = U^{-1}\bar{T}u$$

$$p_0 = \frac{H'_0(kR)J_0(k\rho)}{H_0(kR)J_0(k\rho)} a_0$$

$$p_n = \frac{H'_n(kR)J_n(k\rho)}{H_n(kR)J_n(k\rho)} a_n$$

$$q_n = \frac{H'_n(kR)J_n(k\rho)}{H_n(kR)J_n(k\rho)} b_n$$

$$\text{虛擬現象參與係數} = \frac{H'_n(kR)}{H_n(kR)} a_n$$

**Dirichlet problem** : 給定  $a_0, a_n, b_n$

$$\bar{L}t = Mu \Rightarrow t = \bar{L}^{-1}Mu$$

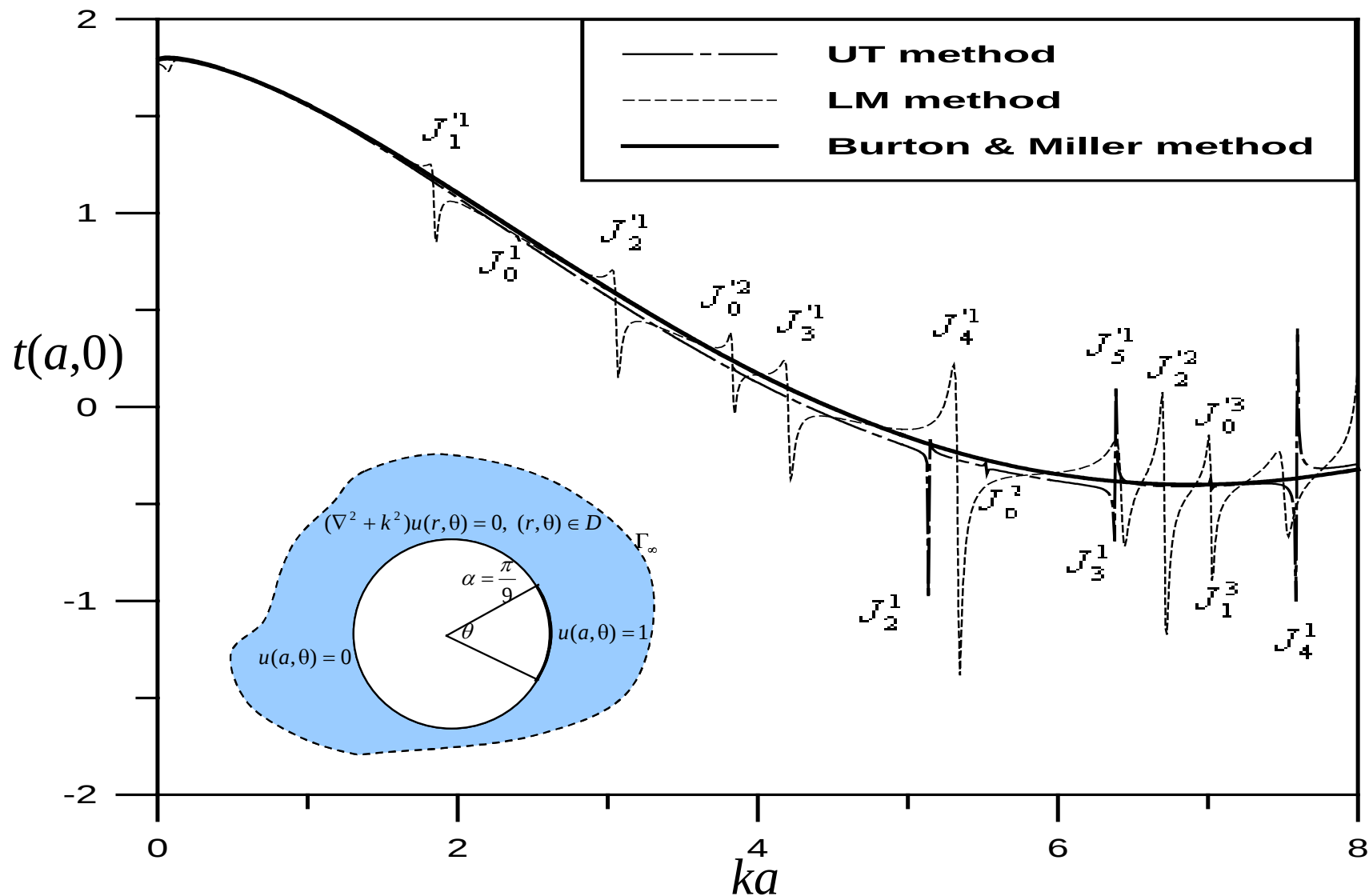
$$p_0 = \frac{H'_0(kR)J'_0(k\rho)}{H_0(kR)J'_0(k\rho)} a_0$$

$$p_n = \frac{H'_n(kR)J'_n(k\rho)}{H_n(kR)J'_n(k\rho)} a_n$$

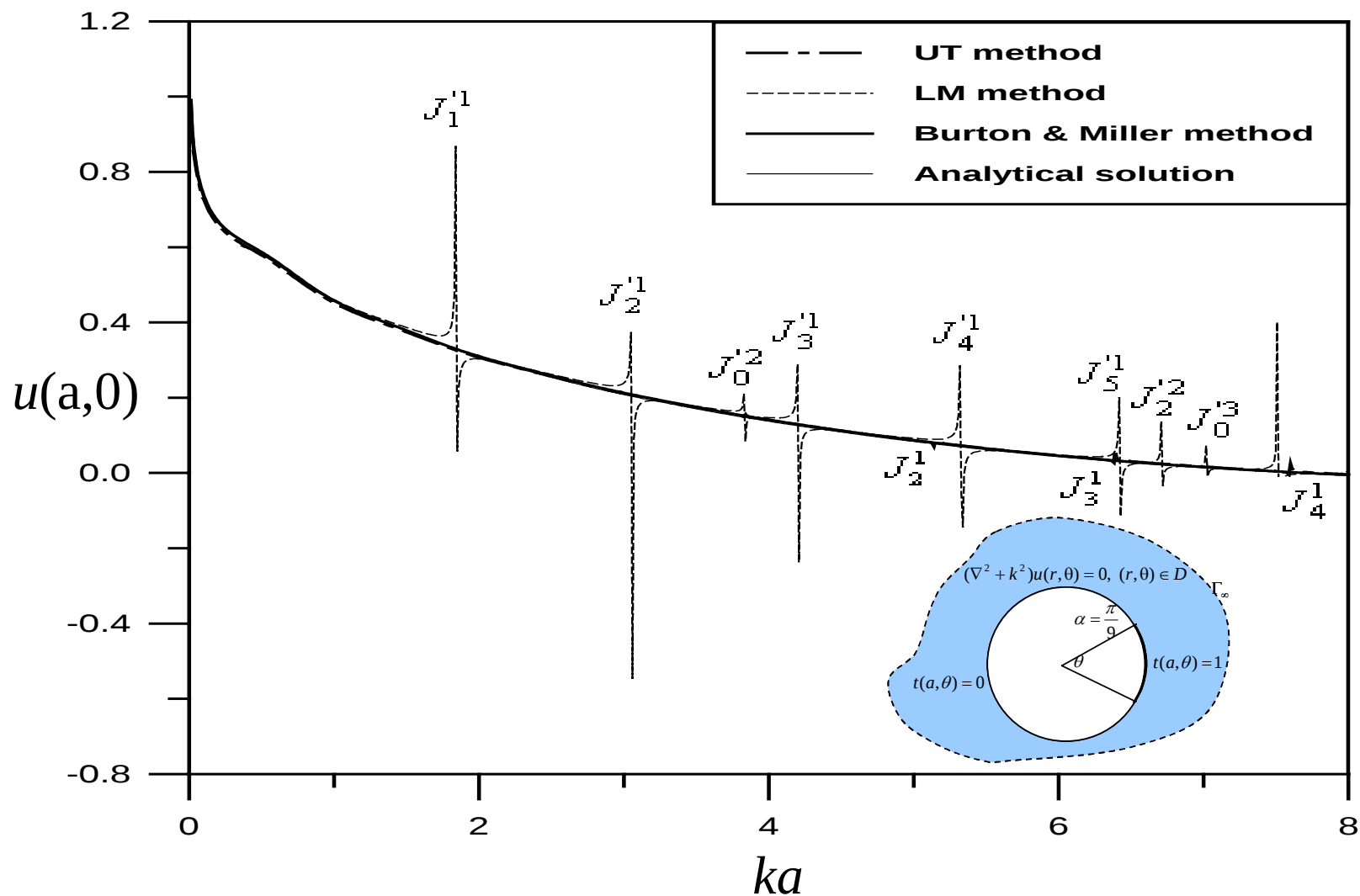
$$q_n = \frac{H'_n(kR)J'_n(k\rho)}{H_n(kR)J'_n(k\rho)} b_n$$

$$\text{虛擬現象參與係數} = \frac{H'_n(kR)}{H_n(kR)} a_n$$

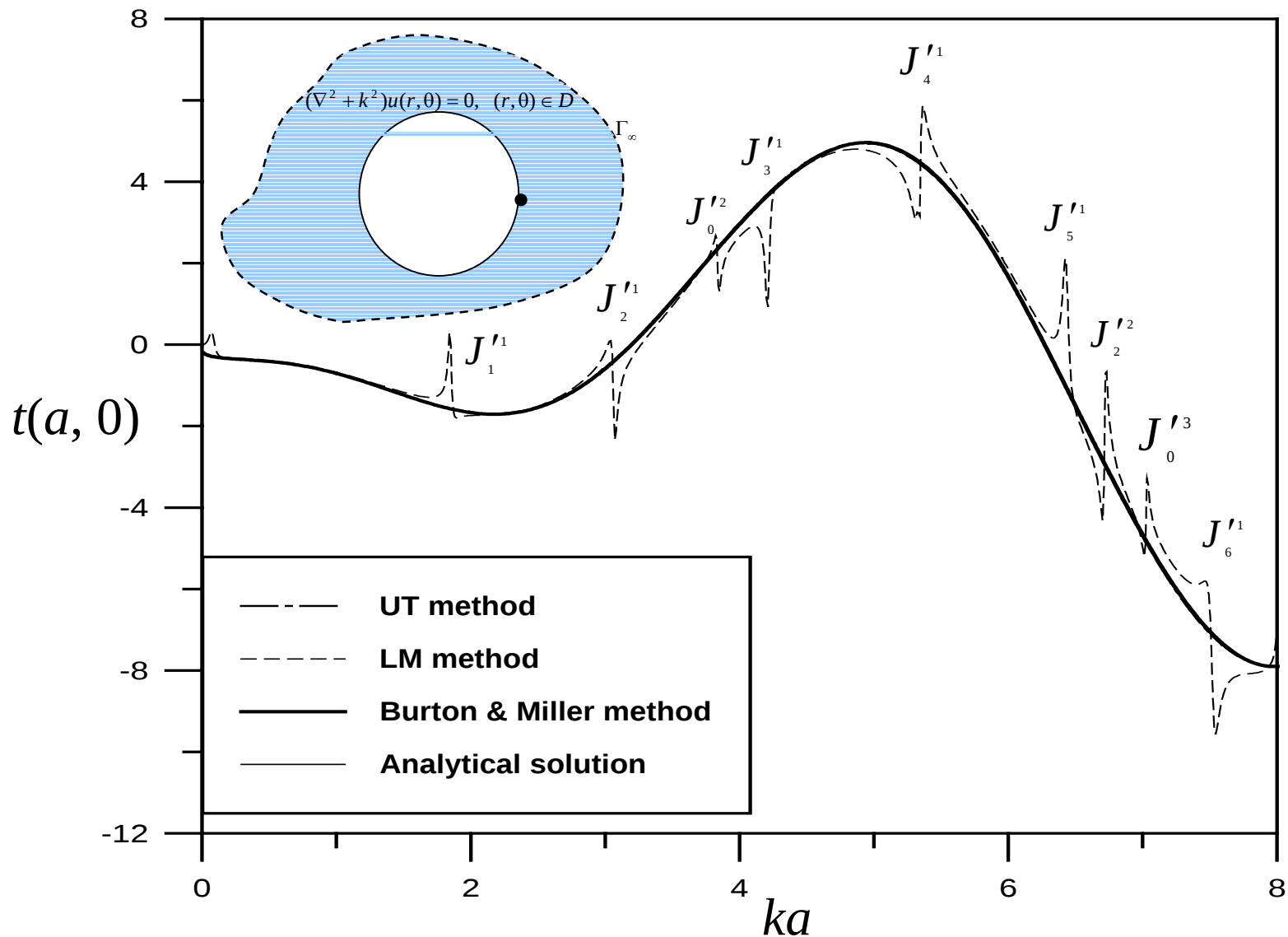
# 虛擬頻率：不均勻輻射Dirichlet問題



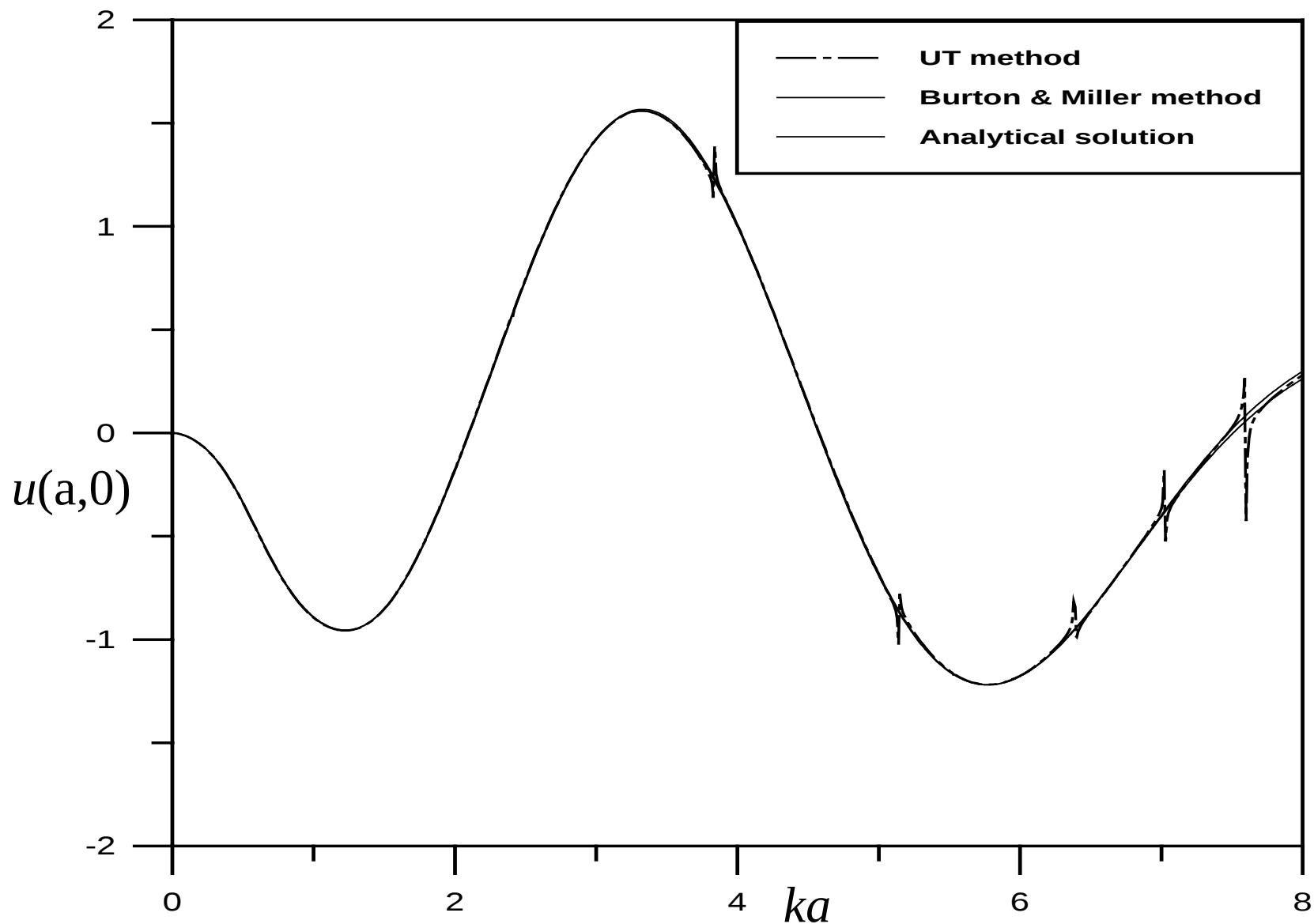
# 虛擬頻率：不均勻輻射Neumann問題



# 虛擬頻率：散射Dirichlet問題



# 虛擬頻率：散射Neumann問題



# 結論

1. BEM僅需對邊界切割元素即可，可大大縮短計算與前處理時間
2. 在BEM取的元素個數比FEM少的情況下，BEM的解就可與解析解非常接近
3. 虛擬現象參與係數釐清虛擬頻率發生的機制
4. 使用Burton & Miller法可避開0/0的數值不穩，進而解決虛擬頻率的問題。