對稱化邊界元素法理論推導與程式開發

作者 陳正宗[1] 陳桂鴻[2] 丘宜平[2]

報告人 陳義麟

[1] 國立台灣海洋大學河海工程系教授

[2] 國立台灣海洋大學河海工程系研究生

對稱化邊界元素法理論推導與程式開發

陳正宗[1] 陳桂鴻[2] 丘宜平[2]

1 國立台灣海洋大學河海工程系教授

2 國立台灣海洋大學河海工程系研究生

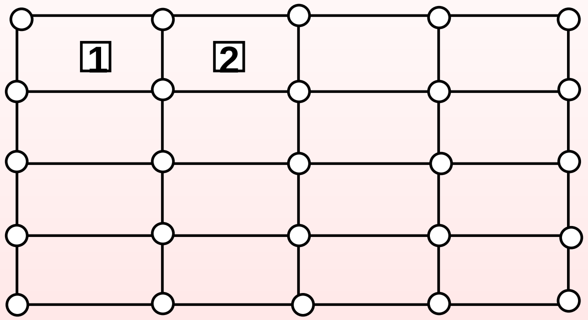
綱要

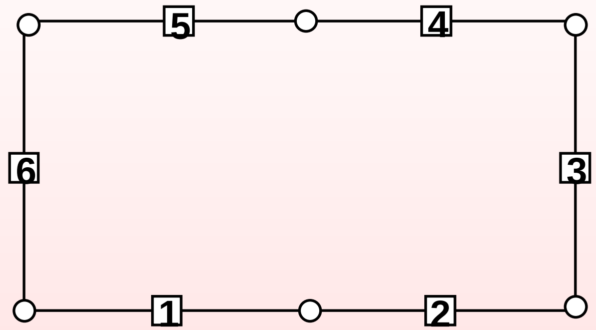
1. 動機
2. 有限元素法**(FEM)**與邊界元素法**(BEM)**
3. 超奇異積分方程扮演的角色**(Hypersingular IE)**
4. 對偶積分方程**(Dual IE)**
5. 對偶邊界雙重積分
6. 數值實驗
7. 結論

動機

- 如何避免傳統邊界元素影響係數矩陣不對稱的缺點。
- 如何與有限元素法（FEM）結合。
- 如何減少計算機的記憶空間與計算時間並增加求解的精確度與速度。

What Is Boundary Element Method ?





○ geometry node

N the Nth constant or linear element

American doctor !

Chinese doctor !

FEM　　　　　　　　BEM

$$[K]=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_1 & b_2 & c_2 & & \\ & a_2 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & a & b \end{bmatrix}_{m\times m}$$

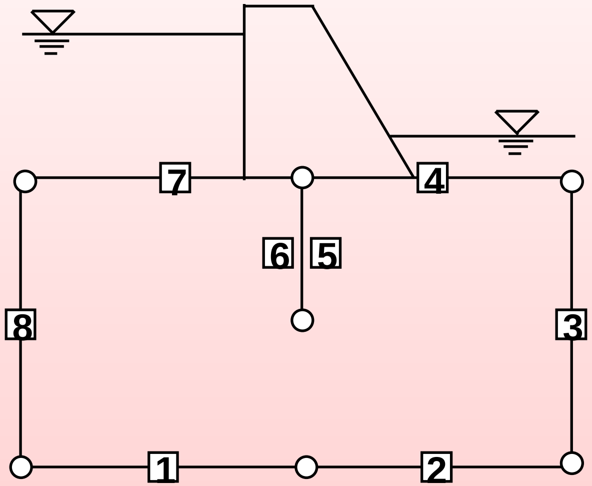
$$[U^I]=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2n-2} & a_{2n-1} \\ a_{2n-1} & a_0 & \cdots & a_{2n-3} & a_{2n-2} \\ a_{2n-2} & a_{2n-1} & a_0 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_{2n-1} & a_0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

m > n

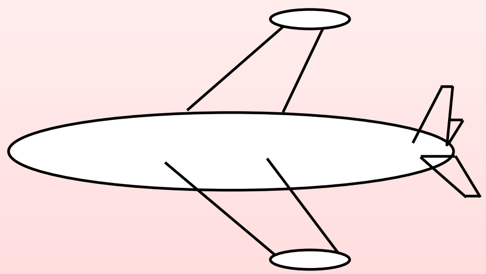
FEM矩陣維度大但為帶寬矩陣　　BEM維度小但為滿矩陣

Hypersingular integral equation and its applications to computational mechanics

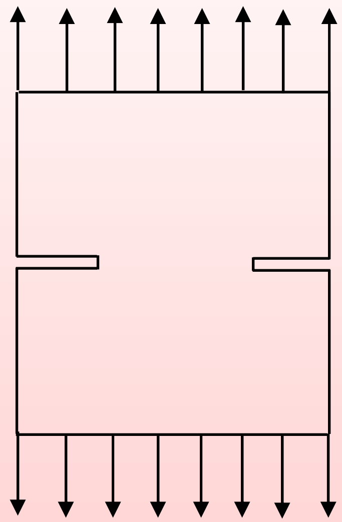
Seepage with sheetpiles



Thin-airfoill Aerodynamics



Crack problem



對偶邊界點積分方程爲

奇異積分方程(UT)

$$\alpha u(x) = C.P.V\int_B T(s,x)u(s)\,dB(s) - R.P.V\int_B U(s,x)t(s)\,dB(s),\ x \in B$$

超奇異積分方程

$$\alpha t(x) = H.P.V\int_B M(s,x)u(s)\,dB(s) - C.P.V\int_B L(s,x)t(s)\,dB(s),\ x \in B$$

其中 *u* 爲速度勢位，*B* 爲問題的邊界，*U(x,s)*爲基本解

$$t(s) = \frac{\partial u(s)}{\partial n_s},\quad T(s,x) \equiv \frac{\partial U}{\partial n_s},\quad L(s,x) \equiv \frac{\partial U}{\partial n_x},\quad M(s,x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial n_s \partial n_x}$$ 。

核函數的對稱關係

$$U(s,x) = U(x,s) \qquad T(s,x) = L(x,s) \qquad M(s,x) = M(x,s)$$

取常元素離散化後可得

U_{ij} , T_{ij} , L_{ij} 及 M_{ij} 四個係數矩陣, 但是

$U_{ij} \neq U_{ji}$ $T_{ij} \neq L_{ji}$ $M_{ij} \neq M_{ji}$

$$U_{ij} = \int_B U(s,x)dB(s)$$

$$T_{ij} = \int_B T(s_j,x_i)dB(s_j) - \delta_{ij}\alpha$$

$$L_{ij} = \int_B L(s_j,x_i)dB(s_j) + \delta_{ij}\alpha$$

$$M_{ij} = \int_B M(s_j,x_i)dB(s_j)$$

對偶邊界雙重積分

$$\int_{B(x)} \alpha u(x) dB(x) = \int_{B(x)} C.P.V \int_{B(s)} T(s,x) u(s)\, dB(s) dB(x)$$

$$- \int_{B(x)} R.P.V \int_{B(s)} U(s,x) t(s)\, dB(s) dB(x), x \in B$$

$$\int_{B(x)} \alpha t(x) dB(x) = \int_{B(x)} H.P.V \int_{B(s)} M(s,x) u(s)\, dB(s) dB(x)$$

$$- \int_{B(x)} C.P.V \int_{B(s)} L(s,x) t(s)\, dB(s) dB(x), x \in B$$

對偶邊界雙重積分

$$U_{ij}^{(2)} = \int_{B(x)} \int_{B(s)} U(s_j, x_i) dB(s_j) dB(x_i)$$

$$T_{ij}^{(2)} = \int_{B(x)} \int_{B(s)} T(s_j, x_i) dB(s_j) dB(x_i) - \delta_{ij} \int_{B(x)} \alpha u(x_i) dB(x_i)$$

$$L_{ij}^{(2)} = \int_{B(x)} \int_{B(s)} L(s_j, x_i) dB(s_j) dB(x_i) + \delta_{ij} \int_{B(x)} \alpha t(x_i) dB(x_i)$$

$$M_{ij}^{(2)} = \int_{B(x)} \int_{B(s)} M(s_j, x_i) dB(s_j) dB(x_i)$$

$$U_{ij}^{(2)} = U_{ji}^{(2)} \qquad M_{ij}^{(2)} = M_{ji}^{(2)}$$

$$T_{ij}^{(2)} = L_{ji}^{(2)}, \quad if \quad i \neq j$$

$$T_{ij}^{(2)} = -L_{ji}^{(2)}$$

應用範例

For Dirichlet B.C. ($u = \bar{u}$)

Using the *UT* formulation

$$U_{ij}^{(2)}\{t\} = T_{ij}^{(2)}\{\bar{u}\} = \{a\}$$

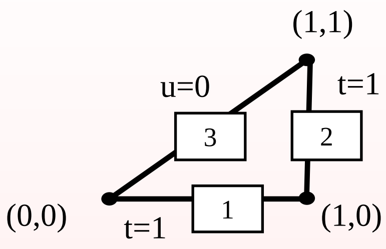
For Neumann B.C. ($t = \bar{t}$)

Using the *LM* formulation

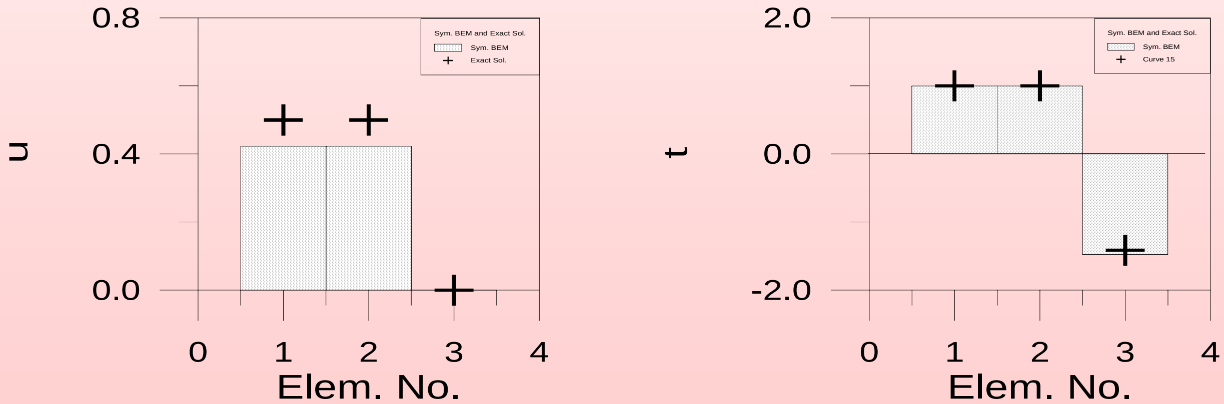
$$M_{ij}^{(2)}\{u\} = L_{ij}^{(2)}\{\bar{t}\} = \{b\}$$

Mixed type B.C.

$$\begin{bmatrix} T^{(2)} & U^{(2)} \\ M^{(2)} & L^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ t \end{Bmatrix}$$



(a) 問題邊界與已知邊界條件



(b)對稱化BEM與解析解比較

結論

1. 積分方成取常元素離散後會破壞核函數的對稱性
2. 經再將邊點對邊界積分作一次積分可得到對稱的矩陣
3. 其與BEM的方法不同處在於本法仍然僅對邊界積分而非如FEM對領域作積分
4. 成功的以數值實驗驗證本法的有效性