

對偶邊界元素法在疲勞破壞之工程應用

陳正宗* 沈文成* 林建華** 全湘偉***

*國立台灣海洋大學河海工程學系教授

**中華顧問工程司港灣部

***中山科學研究院飛彈火箭研究所

摘要

洪與陳於 1986 年發展出對偶邊界元素法，已成功克服了含退化邊界（裂縫）以邊界元素法求解的困難。基於只對問題的邊界作離散，引入超奇異積分方程式，式中的發散積分則以阿達馬主值觀念求解，可對破壞力學與裂縫成長路徑預測進行分析。本文首先回顧對偶邊界積分方程理論，進而介紹對偶邊界元素法。最後以二維與三維含裂縫彈性體進行應力強度因子計算，並與解析解和有限元素法比較，驗證本法之可行性。據此，更實際應用在火箭發動機裂縫之破壞模式評估與裂縫成長路徑預測，並與有限元素法和實驗結果比較。另對飛彈連結結構 V 型環進行破壞力學與裂縫成長分析並與有限元素法比較，均能得到滿意的結果，真正落實產業界的實際應用。

ENGINEERING APPLICATIONS OF DUAL BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR FRACTURE AND FATIGUE

Jeng-Tzong Chen* Wen-Cheng Shen* Jiann-Hwa Lin** Shiang-Woei Chyuan***

*Department of Harbor and River Engineering, National Taiwan Ocean University

** Harbor and Coastal Engineering Department,
China Engineering Consultants Incorporation

*** Missile and Rocket System Research Division,
Chung-shan Institute of Science and Technology

Abstract

Hong and Chen have derived the dual boundary integral equations (DBIE) in 1986 and solved the rank-deficiency problem of the conventional BEM for crack analysis. In numerical implementation, Hong and Chen introduced the hypersingular equation and interpreted the improper integral in the sense of Hadamard principal value. In this paper, we first review the theory of dual boundary integral equations, and introduce the dual boundary element method. In the numerical examples, two and three-dimensional cases are designed to verify the validity. The results are compared with analytical solutions, FEM and experimental data. Good agreement is obtained. In addition, the applications to

solid rocket motor and V-band structures are successfully implemented and the results are compared well with FEM.

一、前言

近年來破壞力學之概念在含裂縫結構設計方面越來越受重視，在航空太空結構容損分析中更是不可或缺。破壞力學對這些結構設計之成敗扮演了重要角色，對結構物的使用壽限可進行評估。傳統的應力分析必須與之相輔相成，方能確保結構安全。破壞力學有一參數，即應力強度因子 K ，此參數為結構幾何外形與負荷之函數，代表裂縫尖端應力集中的程度，與傳統應力分析之應力 σ 類似，可用來評估結構安全性。

使用標準有限元素電腦程式分析含裂縫結構[1,2]，將獲得裂縫尖端附近的位移場及應力場，配合適當方法即可求得 K 值，這些方法經過 Gallagher[3]、Rice 和 Tracey[4] 及 Jerram 和 Hellen[5] 等學者之探討，表明應力強度因子可利用計算所得之裂縫尖端應力場或位移場，代入已知之裂縫尖端場域方程式或從能量觀點考慮而獲得。由於有限元素分析存有離散誤差，此一誤差隨有限元素網目之越精細而縮小，其誤差值且隨節點之不同而有所不同，因此 K 值的計算由不同的節點資料獲得，所得結果將不同，呈離散分佈，這在利用應力計算 K 值時更是明顯。傳統的有限元素分析係針對問題的定義域作離散化處理。而邊界元素法僅對問題的邊界作離散，將邊界上欲求的未知密度函數[6]，以節點未知量和內插函數的乘積和來表示，此乃沿用有限元素的內插近似觀念，傳統的邊界元素法在含裂縫分析時，需以多領域法處理，直到洪與陳才克服了此困難。

有限元素法在處理含裂縫成長分析時，常見的缺點是在每次裂縫成長的時候，均需要重新建立網格，如圖(1)與(2)所示。因此工程師在使用有限元素法處理此問題，花費了許多前處理的建模時間。而早期的邊界元素法則是在遭遇含裂縫（退化邊界）問題時，必須將問題的領域切割再予以分析，和有限元素法一樣在裂縫成長的每個階段，均面臨網格需要再切割。若能本著只對問題的邊界作離散，則在前處理時只對裂縫成長段增加邊界元素，而無需動到前一階段的網格，就可以大幅節省工程師建模的時間，如圖(3)與(4)所示。因此分析裂縫問題時，有限元素法與傳統的邊界元素法，都需要重新切割網格。在 1986 年，洪宏基教授與陳正宗先生發展出了一套對偶邊界元素法[7~11]，能本著邊界元素法的精神只對問題邊界作離散，即可進行裂縫問題的破裂分析，不僅成功克服了以傳統邊界元素法求解退化邊界的困難，在裂縫成長問題亦相當方便。這方面的進展，國外亦有多個單位進行相關研究，如 Gray 和 Paulino[12]、Bonnet 和 Bui[13]、Crouch 和 Selcuk[14]、Cruse[15]、Chang 和 Mear[16] 等。而 Aliabadi[17] 和 Portela[18] 係根據洪和陳所發展的對偶積分式寫成對偶邊界元素法，發展出 BEASY-CRACK 商用軟體。由文獻回顧中，台灣在這方面的研究是國際上最早的。

近年來，我們以對偶積分式為架構，配合邊界元素法成功地應用在裂縫問題、薄翼理論、熱傳、滲流、誤差評估、自適性網格與聲場等問題。在國外，更有多本專書係根據我們的對偶積分式寫成對偶邊界元素法的程式，並以商用程式 BEASY-CRACK 發行，現已普遍為英、美工業界所採用，而使用此程式之國家更高達五十多餘國，主要係使用我們的方法可以節省工程師前處理的時間，縮短建構模式時間，大大縮短工作時程，以利於工程分析之進行。此程式

應用頗為廣泛，我們成功應用在：(1)含應力消除塊固體火箭發動機，並有效減低發動機儲存時的熱應力，可延長火箭的使用年限。(2)飛彈組件：V型環疲勞裂縫的應力強度因子計算，並對裂縫成長路徑作出預測。(3)含隔音牆之聲場分析。(4)導熱板分析。(5)薄翼氣動力分析。

本文首先將對偶邊界積分方程回顧，並對其邊界元素法數值程式作一說明，舉一個簡單測試例驗證本法的正確性後，即將其應用在工程實例，以說明本文之實用性。

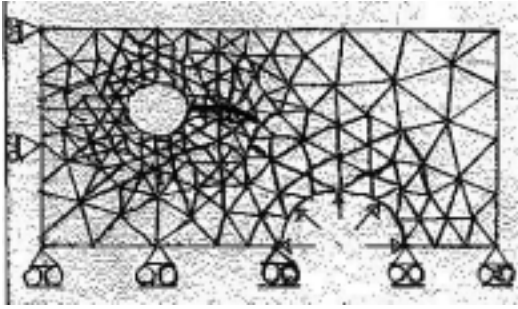


圖 1. 有限元素法網格

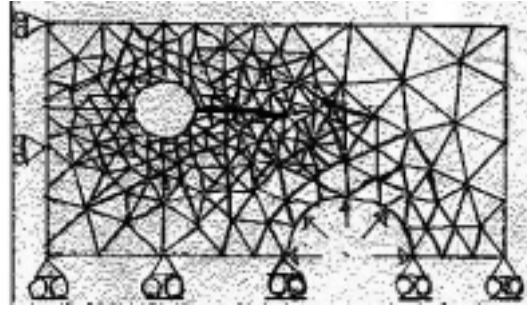


圖 2. 裂縫成長後之有限元素法網格

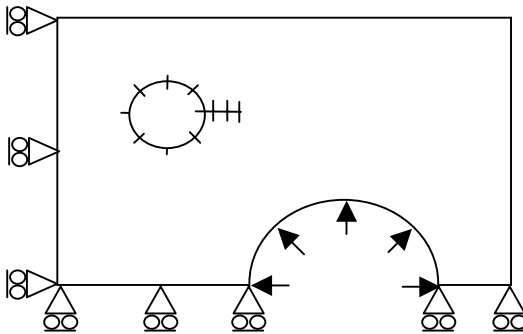


圖 3. 邊界元素法網格

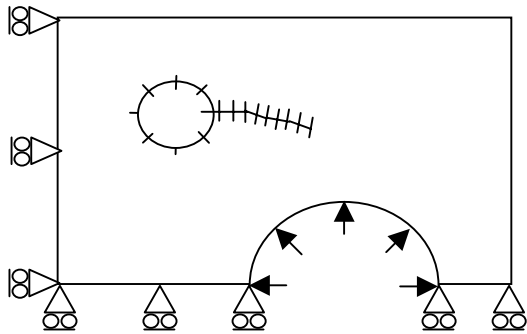


圖 4. 裂縫成長後之邊界元素法網格

二、對偶邊界積分方程式的推導

本節將推導彈性力學問題中的域內點對偶邊界積分方程式，由彈性力學的功能互換原理可知，若有兩彈性體皆處於平衡狀態，而其變位場、曳引力場、徹體力場分別為 (u_i, t_i, b_i) 與 (u_i^*, t_i^*, b_i^*) ，則由 Betti 的功能互換原理可知

$$\int_D (u_i b_i^* - u_i^* b_i) dD = - \int_B (u_i t_i^* - u_i^* t_i) dB \quad (1)$$

其中， D 表示定義域， B 表示邊界。上式可根據自我伴隨運算元的定義，重新改寫

$$(Lu | v) = (u | Lv) \quad (2)$$

其中

$$L = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix} \quad (3)$$

若考慮等向性材料，則 D 與 B 分別代表運算元，而 Navier 運算元與曳引力運算元分別為

$$D_{ij} = (\lambda + G)\partial_i\partial_j + G\delta_{ij}\partial_k\partial_k \quad (4)$$

$$B_{ij} = \lambda n_i\partial_j + G(n_i\partial_i + \delta_{ij}n_k\partial_k) \quad (5)$$

其中， λ 與 G 為 Lamé 常數， n_i 為方向餘弦， δ_{ij} 表示 Kronecker 符號，當 $i = j$ 時，其值為 1，當 $i \neq j$ 時，則為 0。 ∂_k 表示對 k 方向的空間偏微。

若考慮兩個彈力狀態 u_j 與 u_j^* ，則平衡方程式可分別寫成

$$D_{ij}u_j + b_i = 0, x \in D \quad (6)$$

$$D_{ij}u_j^* + b_i^* = 0, x \in D \quad (7)$$

而曳引力場可寫成

$$B_{ij}u_j(x) = t_i(x) \quad (8)$$

$$B_{ij}u_j^*(x) = t_i^*(x) \quad (9)$$

若考慮 (u_i^*, t_i^*, b_i^*) 為基本解系統，可表成

$$u_i^* = v_i = U_{ij}(x, s) \quad (10)$$

$$t_i^* = B_{ik}v_k = B_{ik}U_{kj}(x, s) = T_{ij}(x, s) \quad (11)$$

$$b_i^* = -D_{ik}v_k = -D_{ik}U_{kj}(x, s) = \delta_{ij}(x, s) \quad (12)$$

其中， $U_{ij}(x, s)$ 與 $T_{ij}(x, s)$ 分別代表位移與曳引力基本解，亦可稱為 Kelvin 解，分別說明如下：

(1) $U_{ij}(x, s)$ ：表示於 s 處施以 j 方向之集中力，在 x 處所產生 i 方向的變位場。

(2) $T_{ij}(x, s)$ ：表示於 s 處施以 j 方向之集中力，在 x 處所產生 i 方向的曳引力場。

將基本解代入式(1)且假設 $b_i = 0$ 可導得

$$\int_B [U_{ij}(x, s)t_i(x) - T_{ij}(x, s)u_i(x)]dB(x) = \begin{cases} u_j(s) & s \in D_i \\ 0 & s \in D_e \end{cases} \quad (13)$$

其中， D_i 和 D_e 分別表示域內與域外。若定義 x 為場點， s 為源點，可以將上式重新改寫成

$$\int_B [U_{ki}(s, x)t_k(s) - T_{ki}(s, x)u_k(s)]dB(s) = \begin{cases} u_i(x) & x \in D_i \\ 0 & x \in D_e \end{cases} \quad (14)$$

上式若從彈性力學解存在且唯一的觀點而言，可說成解的積分表示式。對數值方法之應用而言，為建立一套完整邊界元素法理論，上式對含退化邊界問題而言，若僅對邊界作離散，欲定出唯一解，是不夠的。因此，需再建立另一方程式，即對上述之位移場作曳引力運算可得

$$\int_B [L_{kp}(s, x)t_k(s) - T_{kp}(s, x)u_k(s)]dB(s) = \begin{cases} t_p(x) & x \in D_i \\ 0 & x \in D_e \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$L_{kp}(s, x) = B_{pi}(\partial, n_x)\{U_{ki}(s, x)\} \quad (16)$$

$$M_{kp}(s, x) = B_{pi}(\partial, n_x)\{T_{ki}(s, x)\} \quad (17)$$

$B_{pi}(\partial, n_x)$ 表示對變位場 $u_i(x)$ 之曳引力運算元。式(14)與(15)中，因 x 不在邊界上，且取 $x \in D_i$ ，可稱為域內點對偶邊界積分式。

我們已經導得域內點邊界積分式，然而邊界元素法的應用，是為了得到邊界未知邊界物理量間的相容關係式，或是稱之為泛函束制條件。因此必須將域內點對偶邊界積分式中的場點推到邊界，才可以得到邊界節點未知量的代數方程式。但是由於核函數的奇異特性，在積分的過程中一定會遭遇奇異積分與主值的問題。針對各種核函數不同的奇異性所導致的主值觀念，對偶邊界積分方程式可改寫成

$$c_{ij}u_j(x) = RPV \int_B U_{ki}(s, x)t_k(s)dB(s) - CPV \int_B T_{ki}(s, x)u_k(s)dB(s), x \in B \quad (18)$$

$$c_{ij}t_j(x) = CPV \int_B L_{ki}(s, x)t_k(s)dB(s) - HPV \int_B M_{ki}(s, x)u_k(s)dB(s), x \in B \quad (19)$$

其中， c_{ij} 為邊界體角所決定，若為平滑邊界，則 $c_{ij} = 0.5\delta_{ij}$ 。而 CPV 、 RPV 與 HPV 分別表示柯西主值、黎曼主值與阿達馬主值。

三、對偶邊界元素法

若將邊界離散化成常數元素，則式(18)與(19)變成

$$\frac{1}{2}u_i(x) = \sum_{l=1}^N RPV \int_{B_l} U_{ik}(s, x)dB(s)t_i(s_l) - \sum_{l=1}^N CPV \int_{B_l} T_{ik}(s, x)dB(s)u_i(s_l) \quad (20)$$

$$\frac{1}{2}t_i(x) = \sum_{l=1}^N CPV \int_{B_l} L_{ik}(s, x)dB(s)t_i(s_l) - \sum_{l=1}^N HPV \int_{B_l} M_{ik}(s, x)dB(s)u_i(s_l) \quad (21)$$

其中， N 表示元素的點數， B_l 表示第 l 個元素點。對二維問題來說，上式可以寫成矩陣形式

$$[C]_{2N \times 2N} \{u\}_{2N \times 1} = [U]_{2N \times 2N} \{t\}_{2N \times 1} - [T]_{2N \times 2N} \{u\}_{2N \times 1} \quad (22)$$

$$[C]_{2N \times 2N} \{t\}_{2N \times 1} = [L]_{2N \times 2N} \{t\}_{2N \times 1} - [M]_{2N \times 2N} \{u\}_{2N \times 1} \quad (23)$$

其中， $\{u\}$ 與 $\{t\}$ 分別表示變位場與曳引力場的行向量，而 $[C]$ 表示自由項矩陣。

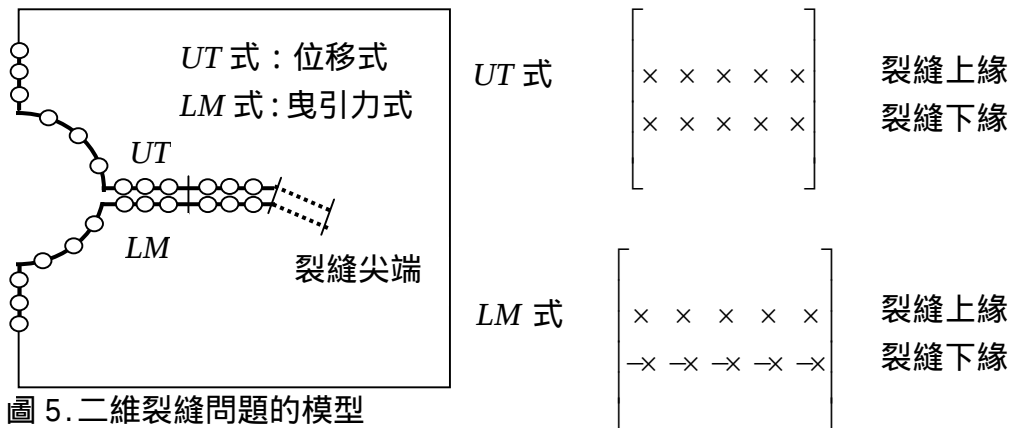
式(22)與(23)又可簡化成

$$[\bar{T}]\{u\} = [U]\{t\} \quad (24)$$

$$[M]\{u\} = [\bar{L}]\{t\} \quad (25)$$

其中， $[\bar{T}]$ 、 $[\bar{L}]$ 與 $[T]$ 、 $[L]$ 的不同是由於自由項矩陣造成。

若僅對邊界作離散， UT 與 LM 式無法個別解決問題，會產生不唯一解，如圖(5)所示。因此必須兩者同時考慮合併使用，才能完全描述退化邊界的問題，而克服解不唯一的困難。換句話說，對偶邊界式對所有的邊界值問題（含與不含退化邊界的問題），充分提供了足夠的邊界物理量的束制條件。



四、例題

為了驗證對偶邊界元素法的可行性，設計一簡單測試例，分別以 MSC/NASTRAN 有限元素程式的二維 CRAC2D 與三維 CRAC3D 元素作模擬，再與對偶邊界元素法結果比較，最後並舉兩個實際應用例作介紹，以說明對偶邊界元素法的實用性。

4.1 簡單測試例，如下圖(6)所示。

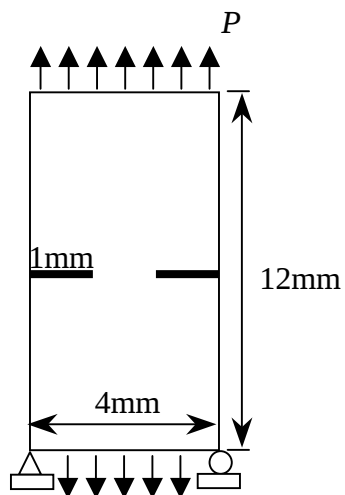


圖 6. 裂縫問題解析例

測試例的特性資料分述如下：

楊氏係數 $E = 10 \times 10^6$ psi

卜松比 $\nu = 0.3$

負荷重 $P = 1000$ kgf/mm²

束制條件-合理地束制剛體運動即可。

(1) MSC/NASTRAN 有限元素法分析時，二維與三維網格分佈，如圖(7)與(8)所示。



圖 7. 二維有限元素網目分佈圖

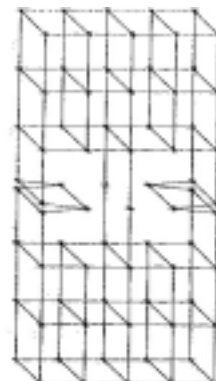


圖 8. 三維有限元素網目分佈圖

(2) 邊界元素法求解時，邊界元素網格分佈、內點分佈、變形圖與主軸應力分佈，如下圖所示。



圖 9. 邊界元素網目圖

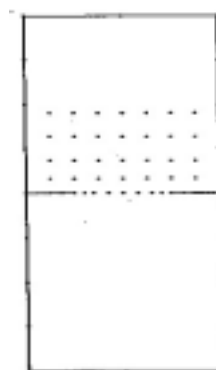


圖 10. 內點分佈圖



圖 11. 變形圖

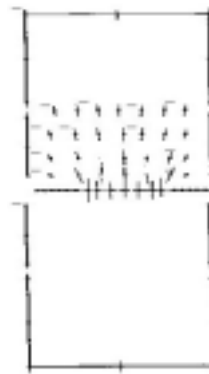


圖 12. 主軸應力分佈圖

茲將分析結果列於表(1)，經過與正確解比較後，得知誤差均在 3% 以內。對偶邊界元素能在最少自由度下得到最佳的結果，更說明對偶邊界元素法之優越性。

表 1. 破壞力學應力強度因子結果比較

	有限元素法 三維元素模擬	有限元素法 二維元素模擬	對偶邊界元素法 一維元素模擬
元素點	18	18	18
節點數	137	37	36
K_I^* (誤差值)	2138 (2.9%)	2021 (2.7%)	2066 (0.482%)

* K_I (正確解) = 2077.5.

4.2 實際例應用

(1) 含應力消除塊固體火箭發動機失效模式評估與裂縫成長預測

圖(13)是含應力消除塊固體火箭發動機的簡圖。在預測裂縫成長時，使用了 Paris 定律，成長方向則根據最大主應力規則判定。對偶邊界元素法與實驗得到的結果相近，如圖(14)所示。

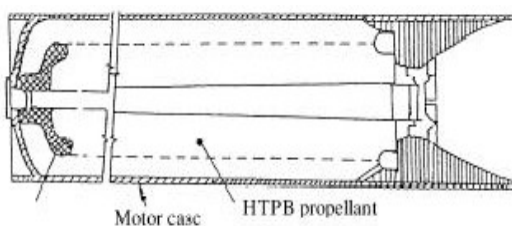


圖 13. 固體火箭發動機

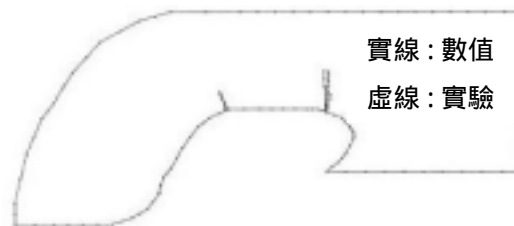


圖 14. 裂縫發生處與成長預估

(2) V 型環疲勞裂縫的應力強度因子計算與裂縫成長預測

圖(15)與(16)分別代表邊界元素法與有限元素法網格。對偶邊界元素法也能成功地預測 V 型環的裂縫成長路徑，如圖(18)所示。由表(2)我們可以發現，使用有限元素法與邊界元素法得到的數值結果雖有些微的不同，但是在工程實務上來說都是具有參考價值。



圖 15. 邊界元素法網格

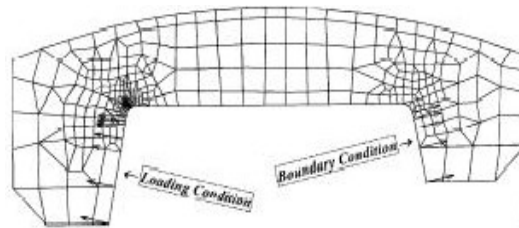


圖 16. 有限元素法網格



圖 17. V 型環結構變形圖



圖 18. 裂縫成長路徑

表 2. 應力強度因子

	有限元素法	邊界元素法
K_I	36.119	34.874
K_{II}	8.748	6.561

五、結論

本文針對我們在台灣發展的對偶邊界積分方程式與對偶邊界元素法，在經過簡單測試例測試可行後，成功地應用在：(1)含應力消除塊固體火箭發動機。能有效減低發動機儲存時的熱應力，延長火箭的使用年限，提出分析與設計參考。(2)飛彈組件：V 型環疲勞裂縫的應力強度因子計算，並對裂縫成長路徑作出預測。對偶邊界元素法與傳統的邊界元素法不同的是，無需多領域切割即可進行破壞分析。在裂縫成長預估，更無需網格重切割，在前處理建模時相當方便，對於實際工程應用將有很大的發揮空間。

參考文獻

1. 陳正宗, 林信立, 韓文仁, 邱垂鈺與秦無忝, 1989, MSC/NASTRAN 使用入門與工程應用, 良宜出版社.
2. 陳正宗, 林信立, 韓文仁, 邱垂鈺, 秦無忝, 黃志勇與全湘偉, 1996, 有限元素分析與工程實例 - MSC/NASTRAN 軟體應用, 北門出版社.
3. Gallagher, R. H., 1971, Survey and Evaluation of the Finite Element in Linear Fracture Mechanics Analysis, Conference Structure Mechanics Reactor Technology, Berlin.
4. Rice, J. R. and Tracey, D. H., 1973, Computational Fracture Mechanics in Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Academic Press, New York.
5. Jerram, K. and Hellen, T. K., 1972, Proc. Int. Conference Welding Research Related to Power Plant, Finite Element in Fracture Mechanics, Southampton.
6. 陳正宗與洪宏基, 1992, 邊界元素法, 新世界出版社.
7. H.-K. Hong and J. T. Chen, 1988, Derivations of Integral Equations of Elasticity, Journal of

- Engineering Mechanics, ASCE, Vol.114, No.6, pp.1028-1044.
8. J. T. Chen and H.-K. Hong, 1999, Review of Dual Boundary Element Methods with Emphasis on Hypersingular Integrals and Divergent Series, Applied Mechanics Reviews, ASME, Vol.52, No.1, pp.17-33.
 9. S. W. Chyuan, J. H. Lin, J. T. Chen and D. C. Liu, 2000, Dual Boundary Element Analysis for Fatigue Behavior of Missile Structure, J. Chinese Institute of Engineers, Vol.23, No.3, pp.339-348.
 10. J. T. Chen and S. Y. Leu, 1998, Finite Element Analysis, Design and Experiment of Solid Rocket Motor with A Stress Reliever, Finite Element Analysis and Design, Vol.29, pp.75-86.
 11. J. T. Chen, S. R. Kuo and J. H. Lin, 2002, Analytical Study And Numerical Experiments for Degenerate Scale Problems in The Boundary Element Method for Two-Dimensional Elasticity, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.54, pp.1669-1681.
 12. L. J. Gray and Glaucio H. Paulino, 1997, Symmetric Galerkin Boundary Integral Fracture Analysis for Plane Orthotropic Elasticity, IUTAM Symposium on Innovative Computational Methods for Fracture and Damage.
 13. Bonnet, M. and Bui, H. D., 1993, Regularization of The Displacement and Traction BIE for 3D elastodynamics using indirect methods. In: Kane, J. H., Maier, G., Tosaka, N. and Atluri, S. N., Advances in Boundary Element Techniques, chapter 1, pp.1-29, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag.
 14. Crouch, S. L. and Selcuk, S., 1992, Two-dimensional Direct Boundary Integral Method for Multilayered Elastic Media, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, Vol.29, No.5, pp.491-501.
 15. Cruse, T. A., 1988, Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
 16. Chang, C. and Mear, M. E., 1995, A Boundary Element method for Two Dimensional Linear Elastic Fracture Analysis, International Journal of Fracture, Vol.74, pp.219-251
 17. M. H. Aliabadi, 2002, the Boundary Element Method- Applications in Solids and Structure (Vol.2), John Wiley & Son, New York.
 18. A. Portela, 1993, Dual Boundary Element Analysis of Crack Growth, Computational Mechanics Publications.

陳正宗 -jtchen@mail.ntou.edu.tw

沈文成 -waveshen@msn.com

林建華 -jiannhwa@pchome.com.tw

全湘偉 -yeaing@iris.seed.net.tw

URL : <http://ind.ntou.edu.tw/~msvlab>