

## 邊界元素法在拉普拉斯方程反算問題之應用

### Inverse problem of Laplace equation using BEM

林盛益<sup>1</sup> 朱雅雯<sup>1</sup> 陳正宗<sup>2</sup>

S.Y. Lin<sup>1</sup>, Y.W. Chu<sup>1</sup>, J.T. Chen<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 海洋大學河海工程學系研究生

<sup>2</sup> 海洋大學河海工程學系教授

<sup>1</sup>Graduate Student, Department of Harbor and River Engineering,  
National Taiwan Ocean University

<sup>2</sup>Professor, Department of Harbor and River Engineering,  
National Taiwan Ocean University

#### 摘要

本研究係以「邊界元素法」來求解一給過定邊界條件之拉普拉斯方程問題。首先對於各種不同類型的邊界元素法，藉由影響係數矩陣中的條件數來了解在良態問題中矩陣之特性。進而推廣至拉普拉斯方程之反算問題，探討其影響係數矩陣的病態行為，且對於病態之反算問題提出結合「捨去奇異值分解法」及「L-曲線」之正規化方法來得到合理解。並以一數值算例來驗證本研究之正確性及可行性。

**關鍵字：**邊界元素法、直接法、間接法、虛假邊界元素法、域外點積分方程、條件數、奇異值分解法、正規化方法及L-曲線。

#### Abstract

In this paper, the Laplace problem with overspecified boundary conditions was investigated by using BEM. First, the condition numbers of the influence matrices for different BEMs were obtained. To understand the ill-posed behavior, the condition number of the influence matrices for the well-posed and ill-posed problems was examined for comparison. The reasonable solution of the inverse problem was obtained by employing the regularization technique of truncated SVD and L-curve. Numerical experiments for a circular case was performed.

**Keyword:** BEM, Direct BEM, Indirect BEM, Fictitious BEM, Null-field equation, Condition number, Singular value decomposition, Regularization technique, L-curve.

#### 一、前言

近年來，反算問題[4]在工程上顯得越來越重要，因為傳統的正算模式雖然已能解決許多問題。但是，有些實際工程問題是以正算模式所無法描述的。如(1).隧道開挖時，開挖面的位移及曳引力均可量測，然而前進端資訊則一無所知。(2).如鍋爐之熱傳情形，溫度分佈之情況，在可量測端，溫度與溫度梯度可掌握，另一端則全不知。(3).人體血液之流動情形，僅能就局部外表加以量測。(4).鋼筋混凝土之拉拔試驗，位移與拉力在拉拔端均可掌握，埋入端則一無所知[8]。(5).地盤反算之問題，地表上可量測位移記錄與無曳引力等資訊，地表下岩層則一無所知等等[2,9]，以上統稱「半盲問題」。

反算問題的種類有許多種，本研究主要探討的是「給過定邊界條件之反算問題」

[1,6,8]：在已知的邊界上分有兩種邊界形式，第一種邊界是完全沒有給定任何邊界條件，第二種邊界是給過定之邊界條件(含勢位與勢位導微)，可靠量測取得全部資訊。針對缺少邊界條件或給過定邊界條件之反算問題，在數值運算上主要是會有數值不穩定的情形所產生。若在輸入已知邊界條件資料時若有些許誤差，則運算後之結果將會相差十萬八千里。反算問題通常是在欲解系統中缺乏某種資訊，如果缺少的資訊越多，則在數學上就越難處理。

從數學的角度來看待問題時，以數學定義而言，一般積分方程可分為以下的形式，其中反算問題亦包含在內：

Fredholm 型積分方程

$$\text{第一類} \quad \int_a^b k(x,s)f(s)ds = p(x) \quad (1)$$

$$\text{第二類} \quad f(x) + \int_a^b k(x,s)f(s)ds = p(x) \quad (2)$$

Volterra 型積分方程

$$\text{第一類} \quad \int_a^x k(x,s)f(s)ds = p(x) \quad (3)$$

$$\text{第二類} \quad f(x) + \int_a^x k(x,s)f(s)ds = p(x) \quad (4)$$

其中僅  $f(s)$  為未知密度函數，其餘皆為已知( $a, b, k(x,s)$  及  $p(x)$ )，且  $k(x,s)$  為核函數(kernel function)， $p(x)$  為外力函數。Fredholm 及 Volterra 的第一類問題(1)及(3)皆為病態問題[3,7]，而二類問題(2)及(4)則因為含有一自由項所以皆為良態之問題。

阿達馬(Hadamard)對於如何定義良態問題有以下之看法，良態問題必滿足下列三個條件：(1).解的存在性。(2).解的唯一性。(3).解的連續性。若不滿足上列之任一條件則會有病態問題之產生，而矩陣病態行為之產生有兩種可能之情形。一是在處理反算問題時，其矩陣多為病態矩陣之形式。第二種則是在處理正算問題時，若於推導時為了避開奇異性，如虛假邊界元素法或零場方程，則亦有面臨病態矩陣之可能[7]。

## 二、研究方法及步驟

### 影響係數矩陣條件數的建立

在「邊界元素法」中各種不同的方法所建構出的影響係數矩陣的條件數之比較，其中包含了「直接法的奇異式( $\square$ )<sub>1</sub>」、「直接法的超奇異式( $LM$ )<sub>1</sub>」、「間接法的單層勢能( $UL$ )<sub>1</sub>」、「間接法的雙層勢能( $TM$ )<sub>1</sub>」、「廣義間接法的單層勢能<sub>1</sub>」、「廣義間接法的雙層勢能<sub>1</sub>」、「域外點積分方程式的單層勢能<sub>1</sub>」、「域外點積分方程式的雙層勢能<sub>1</sub>」，各種方法以二維拉普拉斯場為例簡述如下：

直接法：

$$\text{奇異式} \quad pu(x) = C.P.V. \int_B T(s,x)u(s)dB(s) - R.P.V. \int_B U(s,x)t(s)dB(s), \quad x \in B \quad (5)$$

$$\text{超奇異式} \quad pt(x) = H.P.V. \int_B M(s,x)u(s)dB(s) - C.P.V. \int_B L(s,x)t(s)dB(s), \quad x \in B \quad (6)$$

其中  $B$  為定義域  $D$  的邊界， $u(x)$  為邊界上之單層勢能， $t(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n_s}$  則為  $u(x)$  在法向向量之導微，而  $x$  及  $s$  分別為場點及源點， $U(s,x)$  則為滿足  $\nabla^2 U(s,x) = 2pd(x-s)$  方程式之基本解， $U(s,x) = \ln|x-s|$ ， $T(s,x) = \frac{\partial U(s,x)}{\partial n_s}$ ， $L(s,x) = \frac{\partial U(s,x)}{\partial n_x}$  and  $M(s,x) = \frac{\partial U(s,x)}{\partial n_s n_x}$ 。

方程式中， $C.P.V.$ ， $R.P.V.$ 及 $H.P.V.$ 則分別代表柯西、黎曼及阿達馬主值。而方程式(5)及方程式(6)合併使用時則稱為「對偶邊界元素法」。

間接法：

$$\text{單層} \quad u(x) = \int_B U(s, x) f(s) dB(s), \quad t(x) = \int_B L(s, x) f(s) dB(s), \quad x \in D, s \in B \quad (7)$$

$$\text{雙層} \quad u(x) = \int_B T(s, x) j(s) dB(s), \quad t(x) = \int_B M(s, x) j(s) dB(s), \quad x \in D, s \in B \quad (8)$$

其中 $f(s)$ 及 $j(s)$ 為在邊界上假想之密度函數，方程式(7)及(8)分別稱為「單層勢能的間接法」及「雙層勢能的間接法」。

廣義間接法：

$$\text{單層} \quad u(x) = \int_{B'} U(s, x) f(s) dB(s), \quad t(x) = \int_{B'} L(s, x) f(s) dB(s), \quad x \in D, s \in B' \quad (9)$$

$$\text{雙層} \quad u(x) = \int_{B'} T(s, x) j(s) dB(s), \quad t(x) = \int_{B'} M(s, x) f(s) dB(s), \quad x \in D, s \in B' \quad (10)$$

其中 $B'$ 為假想之邊界，方程式(9)及(10)分別被稱為「單層勢能的廣義間接法」及「雙層勢能的廣義間接法」。此方法亦稱「虛假邊界元素法(fictitious boundary element method)」。

域外點零場積分方程：

$$0 = \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - \int_B U(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in D^e, s \in B \quad (11)$$

$$0 = \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - \int_B L(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in D^e, s \in B \quad (12)$$

其中 $D^e$ 為 $D$ 之補領域。

以上之方程式離散化後，可成矩陣之形式。以奇異式(5)及超奇異式的直接法(6)來為例，我們可以得到以下之矩陣形式

$$[U]\{t\} = [T]\{u\} \quad (13)$$

$$[L]\{t\} = [M]\{u\} \quad (14)$$

其中 $[U]$ 、 $[T]$ 、 $[L]$ 及 $[M]$ 為核函數所建構出之影響係數矩陣，而 $\{u\}$ 和 $\{t\}$ 則為邊界物理量所構成之行向量(column vector)。在此，我們將利用圓形退化核的方法來表示其影響係數矩陣中的每個元素，若場點及源點的配置的位置令為 $s = (R, \mathbf{q})$ 及 $x = (r, \mathbf{f})$ ，則我們會有以下之退化核的表示法：

$$U(s, x) = \begin{cases} U^i(s, x) = \ln(R) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{R}\right)^m \cos(m(\mathbf{q} - \mathbf{f})), & R > r \\ U^e(s, x) = \ln(r) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{R}{r}\right)^m \cos(m(\mathbf{q} - \mathbf{f})), & R < r \end{cases} \quad (15)$$

$$T(s, x) = \begin{cases} T^i(s, x) = \frac{1}{R} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{R^{m+1}} \cos(m(\mathbf{q} - \mathbf{f})), & R > r \\ T^e(s, x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^{m-1}}{r^m} \cos(m(\mathbf{q} - \mathbf{f})), & R < r \end{cases} \quad (16)$$

$$L(s, x) = \begin{cases} L^i(s, x) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{m-1}}{R^m} \cos(m(\mathbf{q} - \mathbf{f})), & R > r \\ L^e(s, x) = \frac{1}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^m}{r^{m+1}} \cos(m(\mathbf{q} - \mathbf{f})), & R < r \end{cases} \quad (17)$$

$$M(s, x) = \begin{cases} M^i(s, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mR^{m-1}}{R^{m+1}} \cos(m(\mathbf{q} - \mathbf{f})), & R > r \\ M^e(s, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mR^{m-1}}{r^{m+1}} \cos(m(\mathbf{q} - \mathbf{f})), & R < r \end{cases} \quad (18)$$

如果我們考慮為一邊界為圓，半徑為  $r$  之問題，在邊界上均勻的分佈  $2N$  的元素，則方程式(13)中的影響係數矩陣  $[U]$  可表示為以下的形式

$$[U] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{2N-1} \\ a_{2N-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{2N-2} \\ a_{2N-2} & a_{2N-1} & a_0 & \cdots & a_{2N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

而在矩陣  $[U]$  中的每個元素  $a_m$  可表為

$$a_m = \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta q}^{(m+\frac{1}{2})\Delta q} U(\mathbf{q}, 0) r d\mathbf{q} \quad (20)$$

其中  $\Delta q = \frac{2p}{2N}$ 。而且矩陣  $[U]$  滿足「循環矩陣」及對稱之特性，可表為以下之形式：

$$[U] = a_0 I + a_1 ([C]_{2N})^1 + a_2 ([C]_{2N})^2 + \cdots + a_{2N-1} ([C]_{2N})^{2N-1} \quad (21)$$

其中

$$[C]_{2N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \quad (22)$$

藉由「循環矩陣」及「單位循環矩陣  $[C]_{2N}$ 」之特性，可推導出矩陣  $[U]$  的特徵值即為

$$I_l = a_0 + a_1 (\mathbf{a}_l)^1 + a_2 (\mathbf{a}_l)^2 + \cdots + a_{2N-1} (\mathbf{a}_l)^{2N-1}, l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(N-1), N \quad (23)$$

其中  $I_l$  及  $\mathbf{a}_l$  分別為  $[U]$  及  $[C]_{2N}$  之特徵值。而依循環矩陣  $[C]_{2N}$  之特性可得到其特徵值及特徵向量如下所示，滿足  $\mathbf{a}_l^{2N} = 1$

$$\mathbf{a}_n = e^{i2\pi n / 2N}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), N \quad \text{or} \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2N-1 \quad (24)$$

及

$$\{\mathbf{f}_n\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \mathbf{a}_n^2 \\ \mathbf{a}_n^3 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^{2N-1} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

則矩陣  $[U]$  的特徵值可簡化為

$$I_l = \sum_{m=0}^{2N-1} a_m \mathbf{a}_l^m = \sum_{m=0}^{2N-1} a_m e^{i(2p/2N)ml}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), N \quad (26)$$

又因為對稱之特性

$$a_m = a_{2N-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, 2N-1 \quad (27)$$

所以可得到下式

$$I_l = a_0 + (-1)^l a_N + \sum_{m=1}^{N-1} (\mathbf{a}_l^m + \mathbf{a}_l^{2N-m}) a_m = \sum_{m=0}^{2N-1} \cos(ml\Delta\mathbf{q}) a_m \quad (28)$$

進而得到特徵值

$$I_l \approx \sum_{m=0}^{2N-1} \cos(ml\Delta\mathbf{q}) U(m\Delta\mathbf{q}) R \Delta\mathbf{q} = \int_0^{2p} \cos(l\mathbf{q}) U(\mathbf{q}) R d\mathbf{q} \quad (29)$$

再者，將退化核引入我們就可以推導出矩陣  $[U]$  的奇異值或特徵值，進而可決定矩陣條件數如下：

$$C_N = \frac{\mathbf{s}_N}{\mathbf{s}_1} \quad (30)$$

同理，我們也可以得到在不同方法中每個影響係數矩陣的特徵值，如表一所示，進而得到各種矩陣之條件數。以此推導所得之條件數與邊界元素法之電腦程式(BEPO2D)做一比較，可得如圖 1~4 之結果。由表一所示，在直接法中的  $[T]$  含有一個數值為零之奇異值乃是因為

有一剛體運動項所致，所以在求條件數  $C_N$  時是採用  $C_N = \frac{\mathbf{s}_N}{\mathbf{s}_2}$ ，其餘各方法中若有相同情形

時也採用這樣的方式求條件數。由此表一可得知在元素增多時，各種不同方法的影響矩陣中條件數之變化特性。

### 反算問題

掌握各類方法的矩陣條件數後，接著來考慮一定義域  $D$  內滿足拉普拉斯方程式之問題，如圖 5 所示。

在算例(1)中，在定義域之邊界可區分為兩個部分，在左半圓周之邊界，其已知條件是給定勢能  $\bar{u}(s)$ ，而  $\bar{u}(s)$  在法向向量之導微  $\bar{t}(s)$  則為未知量。而在右半圓周則反之，勢能  $u(s)$  為未知，而  $\bar{t}(s)$  則為已知量，如此之邊界條件為良態之問題。

在算例(2)中，定義域之邊界也如同算例(1)一樣可區分為兩個部分，在左半圓周之邊界，其已知條件是給定勢能  $\bar{u}(s)$  跟  $\bar{u}(s)$  在法向向量之導微  $\bar{t}(s)$ ，而在右半圓周則兩者皆是未知量，而這樣的邊界條件就是病態之問題。

當我們利用邊界元素法的奇異式的直接法來處理病態或良態之問題時，方程式(13)可以表為

$$\begin{bmatrix} A_U & B_U \\ C_U & D_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u \end{bmatrix} \quad (31)$$

其中矩陣係以已知量  $(\bar{u}, \bar{t})$  及未知量  $(u, t)$  之個數來做分割，分為  $A, B, C, D$  四部分，再依已知及未知量來做一重新排列組合，表示如下：

$$\begin{bmatrix} B_U & -B_T \\ D_U & -D_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & -A_U \\ C_T & -C_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{t} \end{bmatrix} \quad (32)$$

可化簡如下

$$[M_A] \{p\} = [M_b] \{q\} \quad (33)$$

在等號左手邊的行向量  $\{p\}$  為未知量，右手邊行向量  $\{q\}$  則由已知量  $\bar{u}(s)$  跟  $\bar{f}(s)$  所組成， $[M_A]$  及  $[M_B]$  為對應已知量及未知量之子矩陣所組合而成。而矩陣形式又可簡化為以下：

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (34)$$

其中  $[A]$  為影響係數矩陣， $\{x\}$  為欲求之未知行向量， $\{b\}$  則為由重新排列過之矩陣與所有的已知量所相乘而得之行向量。良態的問題中，藉由搬移矩陣中的區塊來解決問題，不會有數值不穩定之情形。但在病態問題中，往往會導致極大的誤差，因為在病態問題中的矩陣  $[A]$  通常是含有病態行為，所以我們必須先將矩陣做一正規化的動作，來改善矩陣病態行為。

### 正規化技巧

利用「奇異值分解法」之技巧且結合「L-曲線」[2,5]之觀念，來做為解決矩陣病態行為之正規化方法。若利用奇異值分解法則矩陣  $[A]$  可以分解成以下的形式

$$[A] = [\Phi][\Sigma][\Psi]^T \quad (35)$$

其中矩陣  $[\Sigma]$  為由矩陣  $[A]$  的奇異值  $s_i$  所構成之對角矩陣，而矩陣  $[\Phi]$  及  $[\Psi]$  則分別為左酉及右酉矩陣。亦可表為

$$[A] = \sum_{i=1}^N \{f\}_i s_i \{y\}_i^T \quad (36)$$

其中  $f_i$  及  $y_i$  為  $s_i$  所對應到之奇異向量，由此可得

$$\{x\} = \sum_{i=1}^N \frac{\{f\}_i^T \{b\}}{s_i} \{y\}_i \quad (37)$$

在病態問題中，我們可以發現到在矩陣  $[A]$  之中可能存在一個或是多個數值都很趨近於零之奇異值  $s_i$ ，而也就是因為這些奇異值在數值上都太小或是說太接近於零，所以在數值運算上極容易產生很大的誤差。更具體地來說，某些奇異值與最大的奇異值之間所相差的比率太大而導致誤差的產生。為了避免這個麻煩，所以我們可以忽略一些數值趨近於零之奇異值，而直接以零來取代原本之奇異值，即所謂捨去奇異值分解技巧(Truncated Singular Value Decomposition)，以這樣的方式求得我們的近似解。

$$\{x\} = \sum_{i=1}^n \frac{\{f\}_i^T \{b\}}{s_i} \{y\}_i, \quad n \leq N \quad (38)$$

對於病態問題所採用的正規化方法大部分都是以一個“近似”的良態問題來取代原本之病態問題，利用控制  $n$  來產生一個不會引起病態行為之矩陣來取代原先的矩陣  $[A]$ ，且藉由正規化矩陣  $[A_n] = \sum_{i=1}^n \{f\}_i s_i \{y\}_i^T$  來逼近原系統的影響矩陣。而如何決定最佳化參數

$n$ ，則是正規化方法中的另一個關鍵。一個最常被採用而且又方便的正規化方法就是「L-曲線」，藉由「L-曲線」可以提供我們在正規化方法中一個最佳或最適當之參數選擇。「L-曲線」的觀念則是制定了兩個準則，因為在病態問題中我們所求得之解會因為奇異值趨近於零而產生數值不穩定，產生比解析解要大很多的錯誤解出來。所以，在正規化中一個重要的準則即是要求所得之「解長度的最小化」。再者，因為我們在正規化中是以逼近的方法來求解，所以另一個準則即是要求近似解與解析解彼此間的「誤差最小化」，所以在「L-曲線」中則有  $\|\{x\}\|^2$  及  $\|[A]\{x\} - \{b\}\|^2$  這兩個控制正規化的影響項。 $\|\{x\}\|^2$  即為針對於解的「敏感度」的一個指標，而  $\|[A]\{x\} - \{b\}\|^2$  則是針對於解的「扭曲度」的一種指標，我們再依解

的最小化及誤差最小化的判定原則來選取最佳之參數，取得對於解的「敏感度」及「扭曲度」的平衡，即為「L-曲線」的角點，如圖 6 所示。在選取最佳化之參數後，即可得解

$$\{x\} = \sum_{i=1}^n \frac{\{f\}^T \{b\}}{s_i} \{y\} \text{ 為可接受之近似答案。}$$

### 數值算例

本數值算例是考慮一定義域為之領域，且半徑為1的拉普拉斯方程式之問題，如圖 5 所示。算例(1)中，在定義域之邊界可分為兩個部分，在左半圓周之邊界，其已知條件是給定勢能  $u = R \sin(\mathbf{q})$ ，而  $\bar{u}(s)$  在法向向量之導微  $t(s)$  則為未知量，而在右半圓周則反之，勢能  $u(s)$  為未知，而  $t = \sin(\mathbf{q})$  則為已知量。算例(2)中，定義域之邊界在左半圓周其已知條件是給定勢能  $u = R \sin(\mathbf{q})$  跟  $t = \sin(\mathbf{q})$  在法向向量之導微  $\bar{t}(s)$ 。右半圓周皆為未知量。

使用邊界元素法之奇異方程式來解此一問題時，在邊界上均勻分佈  $20(N_1 = N_2 = 10)$  個常元素為例，首先將問題簡化為  $A\tilde{x} = \tilde{b}$  之線性代數問題，反算問題由圖 7 可看出在  $[A]$  中奇異值之分佈情形，同時可發現有多個數值趨近於零之奇異值，而其多個數值趨近於零之奇異值即為反算問題誤差來源。若未使用正規化方法來求解，則可得到圖 8 之結果，與解析解相差甚多。在結合了奇異值分解法與 L-曲線的技巧與觀念，而我們可以得到之 L-曲線圖形如圖 9 之情形。考慮 L-曲線圖形曲線轉折處之參數  $n_{opt}$  來做一比較，如圖 10 所示，最後選定以  $n_{opt} = 14$  做為最佳化之參數。

若將元素數目增多 ( $N_1 = N_2$ ) 且利用 L-曲線選定適合之最佳化參數  $n_{opt}$ ，則我們可以得到如圖 11 ~ 14 之結果，在元素增多時，我們可以得到較佳之近似解。若在已知邊界及未知邊界分佈不同元素個數時 ( $N_1 > N_2$ )，我們也可以在圖 15 ~ 16 中發現， $N_1 > N_2$  比  $N_1 = N_2$  可以得到較佳之結果，元素增多亦然。再者，由圖 17 及 18 可看出在正算問題及反算問題中，元素個數改變對求解域內物理量之收斂情形，反算問題部分則包含未採用正規化技巧及採用 TSVD 正規化技巧所得之結果，明顯可看出存在於反算問題中的數值不穩定，及本研究所提出之正規化方法之成效。

### 三、結論

1. 由正算問題之各種 BEM 方法中係數矩陣之條件數可得知，在使用廣義間接法及零場方程式時，雖避開了奇異積分，但隨著元素增多，其矩陣之條件數增大，矩陣行為越病態。
2. 在反算病態問題中，使用捨去奇異值分解法及 L-曲線之技巧與觀念，能有效解決矩陣病態之行為，求得合理解。
3. 在使用邊界元素法時解反算問題時，在已知的邊界所分佈的元素數目增多則有助於解之逼近效果。
4. 若在給定足夠之已知邊界條件下，已知邊界條件之分佈元素個數增多亦有助於求解的精度。

### 四、謝誌

感謝國科會大專生參與專題研究計畫 NSC-91-2815-C-019-011-E 之獎助金資助，使本研究得以順利完成。

## 五、參考文獻

1. Chen JT and Chen KH, Analytical study and numerical experiments for Laplace equation with overspecified boundary conditions, Applied Mathematical Modelling, Vol.22, pp.703-725, 1998.
2. Chen LY, Chen JT, Hong H-K and Chen CH, Application of Cesaro mean and the L-curve for the deconvolution problem, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.14, pp.361-373, 1995.
3. Hansen PC, Numerical tools for analysis and solution for Fredholm integral equations of the first kind, Inverse Problem, Vol.8, pp.849-872, 1992.
4. Hansen PC, Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion, Philadelphia : SIAM, 1998.
5. Hansen PC, Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve, SIAM Review, Vol.34, No.4, pp.561-580, 1992.
6. Koya T, Yeih W and Mura T, An inverse problem in elasticity with partially overprescribed boundary conditions, part II: numerical details, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.60, pp.601-606, 1993.
7. Ventsel ES, Numerical stability in regular BEM schemes for elastostatic problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.22, pp.281-289, 1998.
8. Yeih W, Koya T and Mura T, An inverse problem in elasticity with partially overprescribed boundary conditions, part I: theoretical approach, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol.60, pp.595-600, 1993.
9. 陳正宗與陳桂鴻, 地盤反應逆向運算-病態問題, 土木工程技術, 第七期, 第 101~120 頁, 1996.

表一、各種邊界元素方法中影響係數矩陣之奇異值

方法 矩陣	直接法 $K^e$ ( $R = r = a$ )	間接法(B) $K^i$ ( $R = r = a$ )	零場方程 $K^e$	廣義間接法(B') $K^i$
[U]	$I_l = \begin{cases} 2p\alpha \ln a & , l=0 \\ -\frac{p}{l} a & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 2p\alpha \ln a & , l=0 \\ -\frac{p}{l} a & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 2pR \ln r & , l=0 \\ -\frac{p}{l} \frac{R^{l+1}}{r^l} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 2pR \ln R & , l=0 \\ -\frac{p}{l} \frac{R^l}{R^{l-1}} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$
[T]	$I_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ -p & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 2p & , l=0 \\ p & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ -p \left(\frac{R}{r}\right)^l & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 2p & , l=0 \\ p \left(\frac{R}{R}\right)^l & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$
[L]	$I_l = \begin{cases} 2p & , l=0 \\ p & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ -p & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 2p & , l=0 \\ p \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ -p \left(\frac{R}{R}\right)^{l-1} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$
[M]	$I_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ p \frac{1}{a} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ p \frac{1}{a} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ p \frac{R^l}{r^{l+1}} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$	$I_l = \begin{cases} 0 & , l=0 \\ p \frac{R^{l-1}}{R^l} & , l=1,2,\dots,N \end{cases}$

其中  $I_l$  為  $[K]$  之奇異值，場點  $x = (r, f)$ ，源點  $s = (R, q)$ ，離散之元素個數為  $2N + 1$ 。 $K^e$  及  $K^i$  分別代表外，內域之核函數， $K$  可為  $U$ ， $T$ ， $L$  或  $M$ 。

### Direct BEM for the well-posed problem

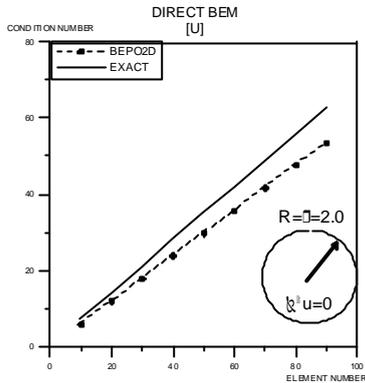


圖 1(a) 條件數-元素個數 [U]

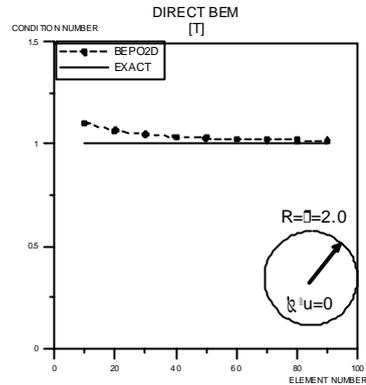


圖 1(b) 條件數-元素個數 [T]

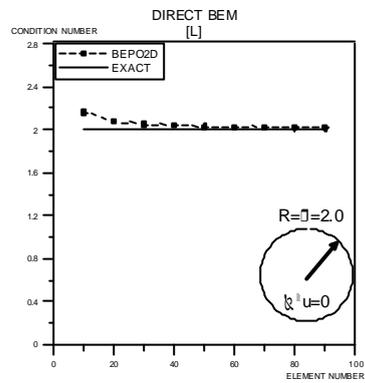


圖 1(c) 條件數-元素個數 [L]

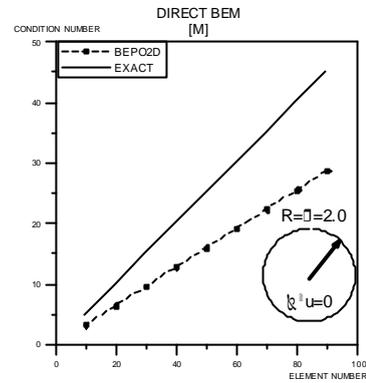


圖 1(d) 條件數-元素個數 [M]

### Indirect BEM for the well-posed problem

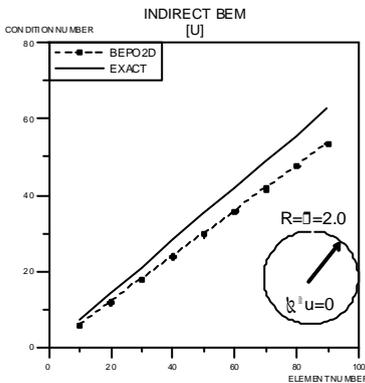


圖 2(a) 條件數-元素個數 [U]

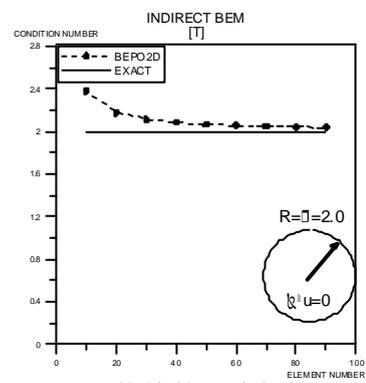


圖 2(b) 條件數-元素個數 [T]

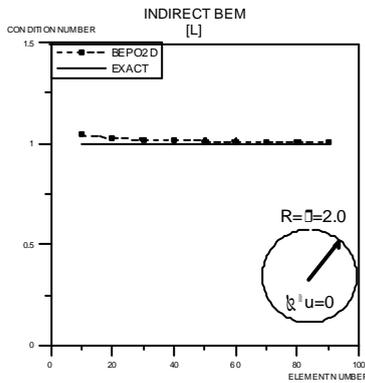


圖 2(c) 條件數-元素個數 [L]

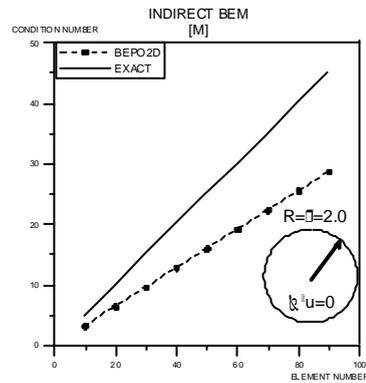


圖 2(d) 條件數-元素個數 [M]

### Indirect BEM(B') for the well-posed problem

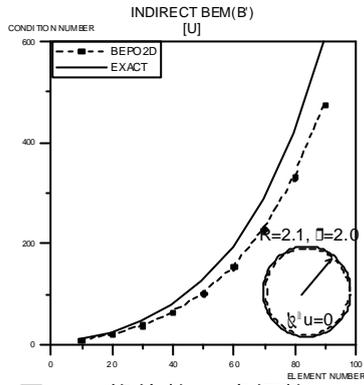


圖 3(a) 條件數-元素個數 [U]

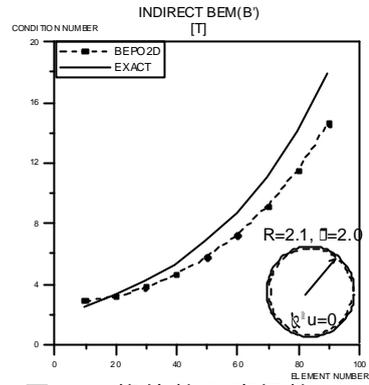


圖 3(b) 條件數-元素個數 [T]

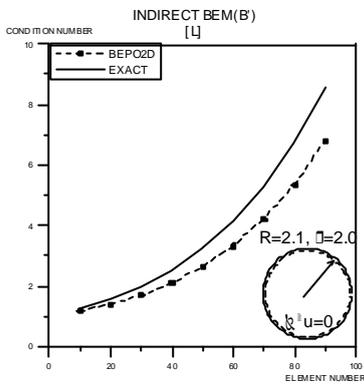


圖 3(c) 條件數-元素個數 [L]

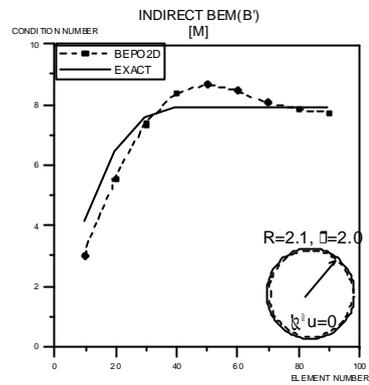


圖 3(d) 條件數-元素個數 [M]

### Null-field eq. for the well-posed problem

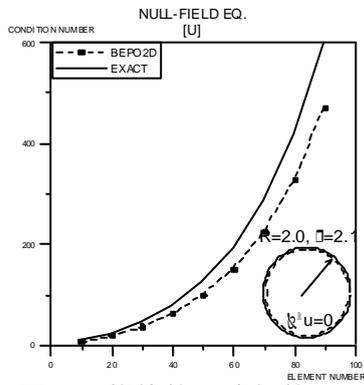


圖 4(a) 條件數-元素個數 [U]

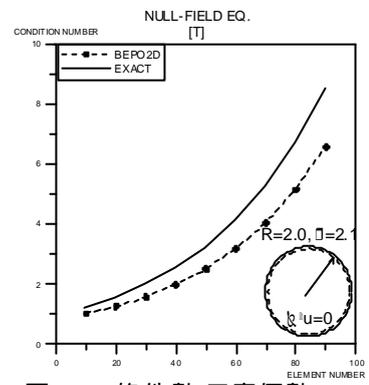


圖 4(b) 條件數-元素個數 [T]

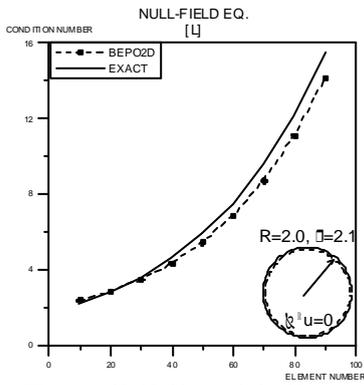


圖 4(c) 條件數-元素個數 [L]

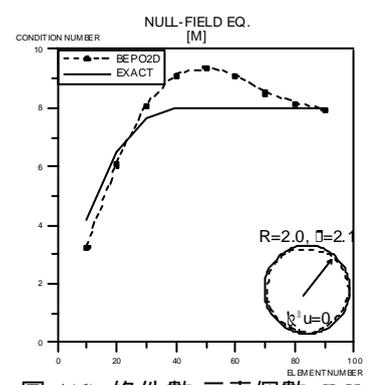


圖 4(d) 條件數-元素個數 [M]

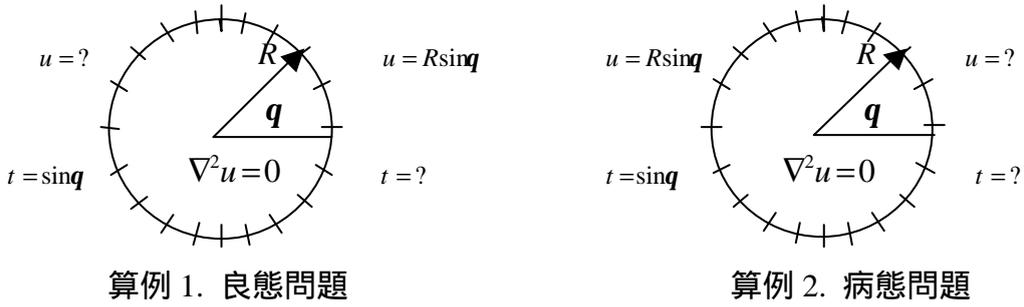


圖 5 算例示意圖

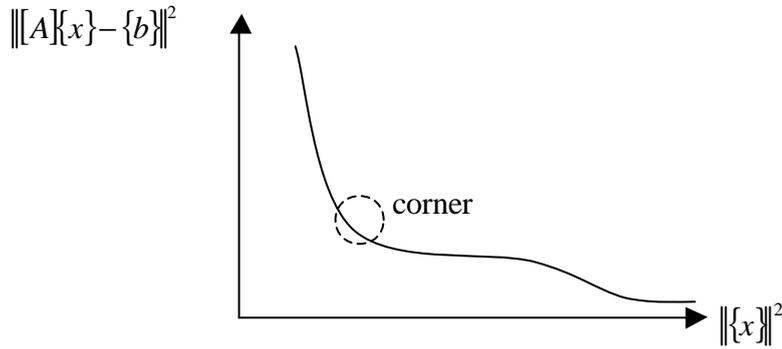


圖 6 L 曲線示意圖

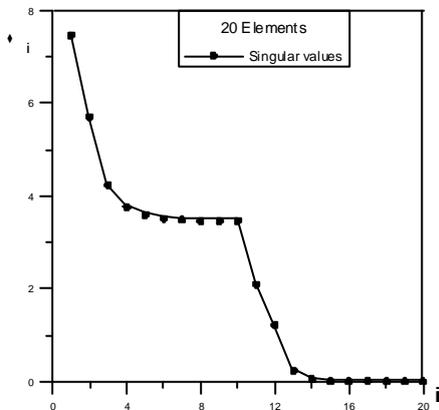


圖 7 反算問題之 [A] 奇異值

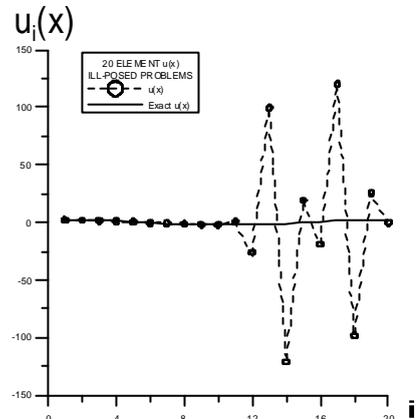


圖 8 未正規化之邊界勢能解

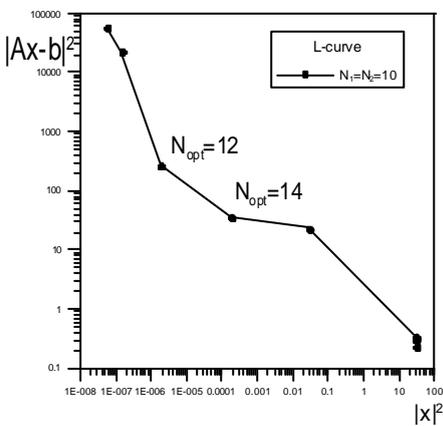


圖 9 L 曲線 ( $N_1 = N_2 = 10$ )

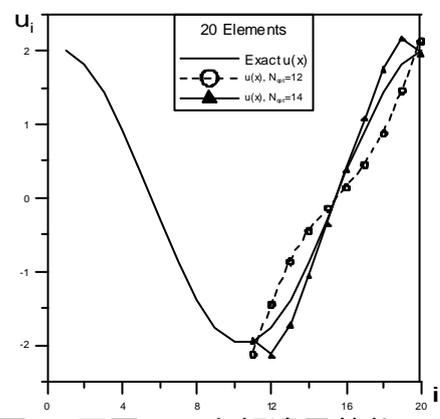


圖 10 不同  $n_{OPT}$  之解邊界勢能  $u(x)$

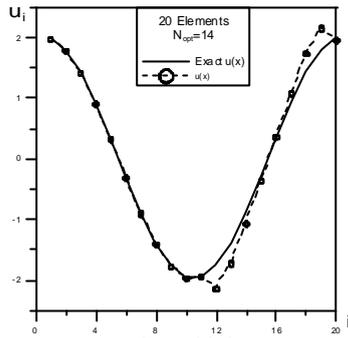


圖 11 邊界勢能  $u(x)$   
 $(N_1 = N_2 = 10)$

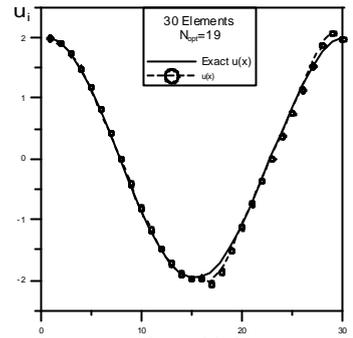


圖 12 邊界勢能  $u(x)$   
 $(N_1 = N_2 = 15)$

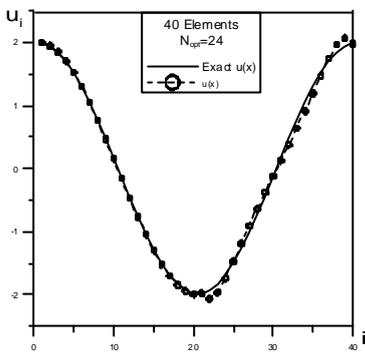


圖 13 邊界勢能  $u(x)$   
 $(N_1 = N_2 = 20)$

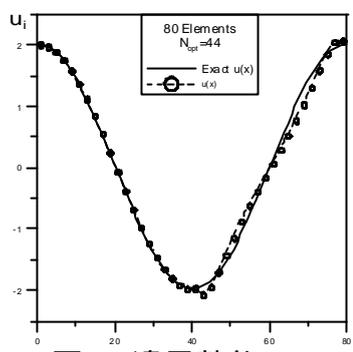


圖 14 邊界勢能  $u(x)$   
 $(N_1 = N_2 = 40)$

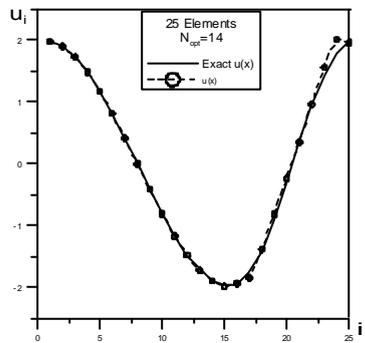


圖 15 邊界勢能  $u(x)$   
 $(N_1 = 15, N_2 = 10)$

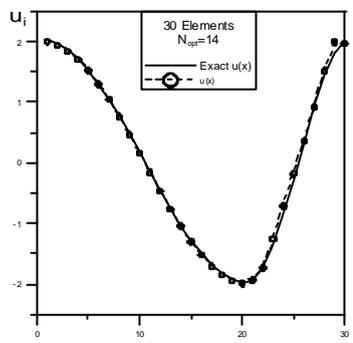


圖 16 邊界勢能  $u(x)$   
 $(N_1 = 20, N_2 = 10)$

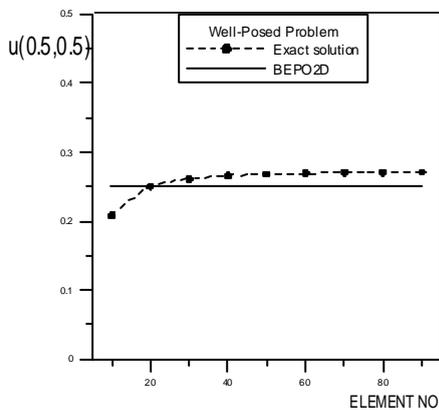


圖 17 正算問題-域內點勢能  $u(0.5, 0.5)$

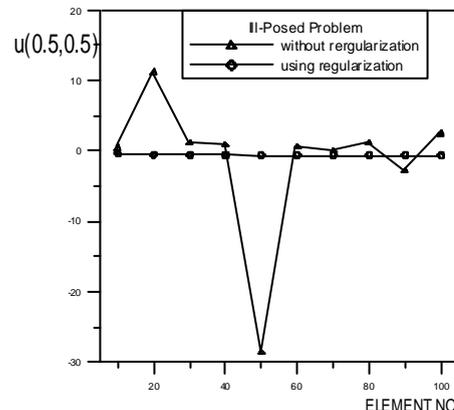


圖 18 反算問題-域內點勢能  $u(0.5, 0.5)$

