

利用Mathematica軟體模擬桿之自由振動行為

指導教授：陳正宗終身特聘教授

張毓玲 高聖凱 李家瑋

國立台灣海洋大學 河海工程系

關鍵詞：自由振動，離散系統，連續系統，Mathematica。

摘要

本論文以針對一維桿自由振動問題，以離散與連續系統進行模擬。並藉由實例，闡述兩者間之關係，再利用Mathematica軟體的動畫功能，將各方法所推算出的理論結果以動畫，呈現建構出理論模型。

前言

在一次的工程數學作業使用到Mathematica軟體，在使用過程中發現此軟體內含強大符號計算與繪圖功能，甚至還可以製作動畫。一般的數學繪圖軟體所能呈現的是一般靜態的圖畫，往往產生學習障礙。所以本文擬以Mathematica為工具，以動畫的方式呈現離散與連續系統的自由振動的解。藉由動畫的展現，將自由振動的離散與連續系統兩者間的關係性呈現出來。若能將自由振動的物理現象用動畫呈現，無論在老師的教學或學生的學習，都將更有效率。

1.研究內容與方法

1.1 多自由度系統之自由振動分析

自由振動控制方程式為

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (1)$$

其中[M]為質量向量；[K]為勁度矩陣。桿子離散系統之軸向位移可假設為

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \cos \omega t \quad (2)$$
$$\text{or} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \sin \omega t$$

其中， ω 為自然頻率

將式(2)代入式(1)中可得

$$-\omega^2 [M] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

整理可化簡為

$$[K] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \omega^2 [M] \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

為了使

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

則由式(4)可知

$$\det [K - \omega^2 [M]] = 0 \quad (6)$$

因此，可得到 ω 及其所對應之特徵向量 $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$ 。

1.2 桿之連續系統之軸向振動

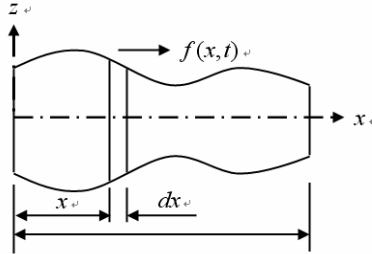


圖 1(a) 桿之軸向振動系統圖

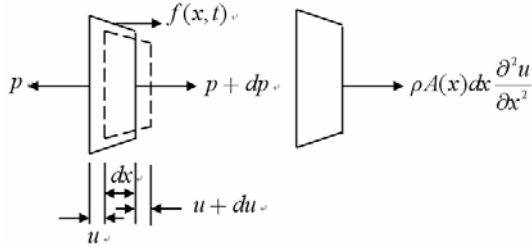


圖 1(b) 柱之軸向振動系統圖

由牛頓第二定律可得

$$(p + dp) + f(x, t)dx - p = \rho A(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

其中， u 為軸向位移； ρ 為桿之密度； $f(x, t)$ 為外力。

應變為

$$\varepsilon = \frac{(dx + u + du - u) - dx}{dx} = \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

軸向力 $p(x)$ 為

$$p(x) = \sigma A(x) = \varepsilon EA(x) = \frac{\partial u}{\partial x} EA(x) \quad (9)$$

其中為 E 楊氏係數； A 為桿斷面積。

將式(8)和式(9)代入式(7)中，並化簡得

$$\frac{\partial}{\partial x} [EA(x) \frac{\partial u}{\partial x}] + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10)$$

若柱為均勻截面，則式(10)又可化簡為

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (11)$$

令 $f(x, t) = 0$ ，則可得桿之軸向自由振動方程式

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow c = \sqrt{\frac{EA}{\rho}} \quad (12)$$

初始條件可表示為

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \dot{u}_0(x) \end{aligned} \quad (13)$$

2. 實例說明

在此，用兩個例子作為說明，所使用之邊界條件為兩端自由以及一端自由與一端固定。而在此兩種例子中，我們先從離散系統來進行探討後，再來看連續系統。在離散系統中，取三個自由度進行觀察，而連續系統則可視為無限多個質點進行運動的情形。

2.1 兩端自由

2.1.1 探討離散型的多自由度運動系統

離散型以 3 個自由度系統作為說明，如圖 2 所示。在無外力作用下，探討系統之自然頻率與其模態。

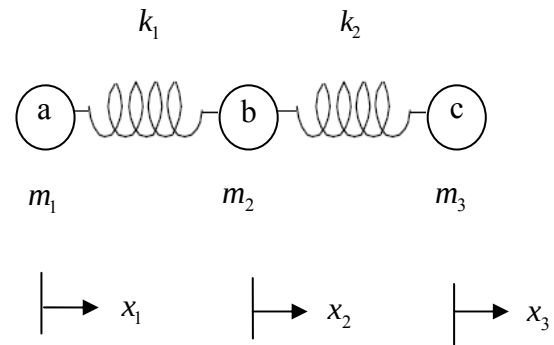


圖 2 三自由度且兩端自由之運動系統

已知

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

先將各質點所受的力做分解，畫出自由體圖，如圖 3 所示。

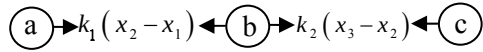


圖3 自由體圖

藉由力平衡可知

質點 a :

$$m_1 \ddot{x}_1 - k_1 (x_2 - x_1) = 0 \quad (15)$$

質點 b :

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 (x_3 - x_2) + k_1 (x_2 - x_1) = 0 \quad (16)$$

質點 c :

$$m_3 \ddot{x}_3 + k_2 (x_3 - x_2) = 0 \quad (17)$$

在此使用到運動方程式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (18)$$

我們將(15)-(17)式聯立可得

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

當質量與彈簧勁度皆取1單位時，可得質量矩陣

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

與勁度矩陣

$$\begin{aligned} [K] &= \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

利用數學解特徵值的方法

$$\det[K - \omega^2[M]] = 0 \quad (22)$$

來求解振動頻率 ω ，三組振動頻率 ω 分別為0、1與 $\sqrt{3}$ ，而與這三組振頻率所對應的振動模態依序為

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

以下將運用 Mathematica 軟體(詳情請見附錄)模擬以下之運動模態:

$$(1) \text{ 當 } \omega_1 = 0, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，如圖 4 所示。

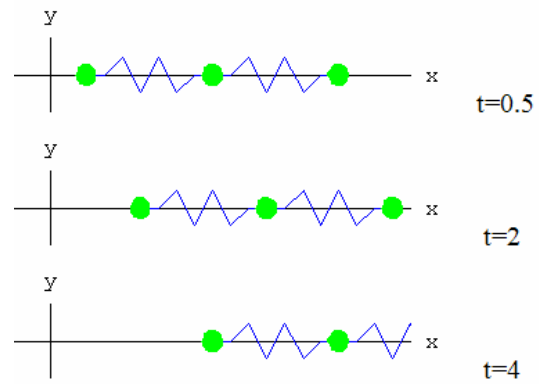


圖 4 3 個自由度之運動模態($\omega_1 = 0$)

$$(2) \text{ 當 } \omega_2 = 1, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，如圖 5 所示。

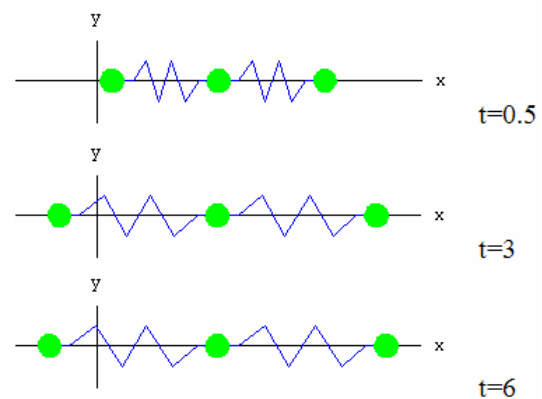


圖 5 3 個自由度之運動模態($\omega_2 = 1$)

$$(3) \text{ 當 } \omega_3 = \sqrt{3}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，如圖 6 所示。

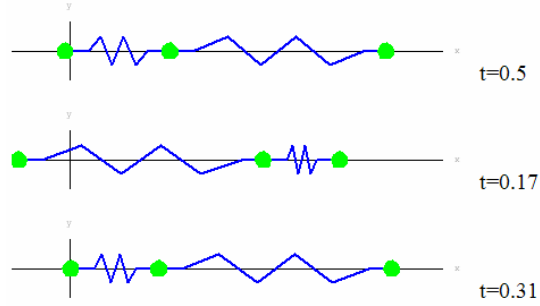


圖 6 3 個自由度之運動模態 ($\omega_3 = \sqrt{3}$)

2.1.2 探討連續系統桿之探討

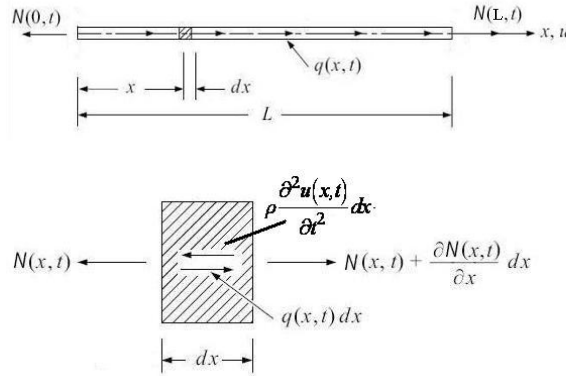


圖 7 均質桿受到橫向載重由力平衡得

$$q(x,t)dx - N(x,t) - \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx + \left[N(x,t) + \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dx \right] = 0 \quad (24)$$

其中 $N(x,t) = 0$ 可以改寫為

$$N(x,t) = \sigma \cdot A(x) = \epsilon E \cdot A(x) = EA(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (25)$$

將式(25)代入式(24)，得

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{EA(x)}{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (26)$$

則連續系統之控制方程式為

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (27)$$

其中

$$c^2 = \frac{EA(x)}{\rho} \quad (28)$$

利用變數分離，令

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \quad (29)$$

將式(29)代入式(27)中可得化簡後可得

$$\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda \quad (30)$$

其中

$$\ddot{X}(x) = \lambda X(x) \quad (31)$$

代入邊界條件

$$\dot{X}(0) = \dot{X}(L) = 0 \quad (32)$$

當 $\lambda < 0$ 時，可假設

$$\lambda = -k^2 \quad (33)$$

將式(33)代入式(31)中，得

$$\ddot{X}(x) = -k^2 X(x) \quad (34)$$

可令其解為

$$X(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx) \quad (35)$$

當其滿足式(34)之邊界條件時，可得

$$X(x) = \sin k_n x \quad (36)$$

其中， $k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$ ， $n=1,2,3,4,\dots$

將式(36)代入式(30)，可得

$$\ddot{T}(t) = -k^2 C^2 T(t) \quad (37)$$

$$T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos(k_n C t) + q_n \sin(k_n C t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [p_n \cos k_n t + q_n \sin k_n t] \cdot \sin k_n x \quad (38)$$

得到

$$\omega_n = (n-1)\pi \sqrt{\frac{EA}{\rho L^2}} \quad (39)$$

因此 ω_n

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 0 \\
\omega_2 &= \pi \sqrt{\frac{EA}{\rho L^2}} \\
\omega_3 &= 2\pi \sqrt{\frac{EA}{\rho L^2}}
\end{aligned} \quad (40)$$

(1) 當 $\omega_1 = 0, \underline{u}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，取十一個點作觀察，如圖 8 所示。

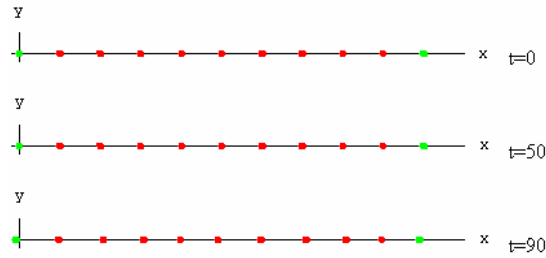


圖 8 為桿之運動模態($\omega_1 = 0$)

(2) 當 $\omega_2 = \pi, \underline{u}_2 = \begin{Bmatrix} 0.9865 \\ 0.9993 \\ 0.9985 \end{Bmatrix}$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，如圖 9。

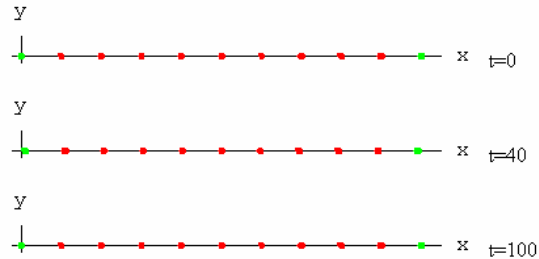


圖 9 為桿之運動模態($\omega_2 = 3.14159$)

(3) 當 $\omega_3 = 2\pi, \underline{u}_3 = \begin{Bmatrix} 0.9993 \\ 0.9973 \\ 0.9939 \end{Bmatrix}$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，如圖 10。

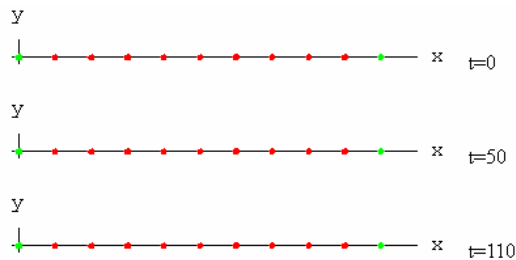


圖 10 為桿之運動模態($\omega_3 = 6.2832$)

2.2 一端固定與一端自由桿

2.2.1 離散型的三自由度運動系統

此系統如圖 2 所示，為三自由度運動系統，且無外力作用，探討系統中之特徵值及特徵向量

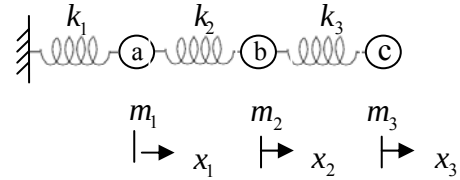


圖 11 左端固定右端自由

作法同上個範例，先對各個質點受力情形做分解，如圖 11 所示。

已知

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (41)$$

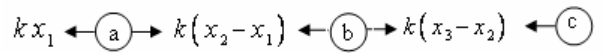


圖 12 自由體圖

藉由力平衡可知

質點 a :

$$m\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) + kx_1 = 0 \quad (42)$$

質點 b :

$$m\ddot{x}_2 - k(x_3 - x_2) + k(x_2 - x_1) = 0 \quad (43)$$

質點 c :

$$m\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0 \quad (44)$$

在此使用到運動方程式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (45)$$

爲了列出質量與勁度矩陣，所以將各質點所受的力整理並得到以運動方程式的形式表現

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

當質量與彈簧勁度皆為1單位時，可得質量矩陣

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

與勁度矩陣

$$[K] = \begin{bmatrix} k+k & -k & 0 \\ -k & k+k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

經過計算後得知此三組振動頻率 ω 分別為0.445、1.247與1.803，而三組振動模態為

$$\begin{aligned} u_1 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{Bmatrix}, u_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.445 \\ -0.802 \end{Bmatrix}, \\ u_3 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.247 \\ 0.554 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (49)$$

$$(1) \text{ 當 } \omega_1 = 0.445, u_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{Bmatrix}$$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，如圖 13。

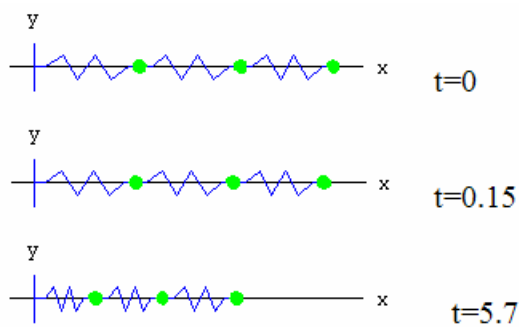


圖 13 為 3 個自由度之運動模態($\omega_1 = 0.445$)

$$(2) \text{ 當 } \omega_2 = 1.247, u_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.445 \\ -0.802 \end{Bmatrix}$$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，如圖 14。

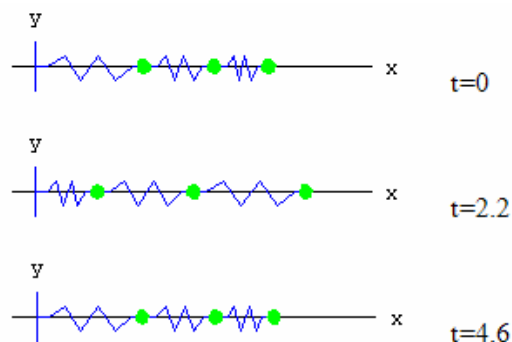


圖 14 為 3 個自由度之運動模態($\omega_2 = 1.247$)

$$(3) \text{ 當 } \omega_3 = 1.803, u_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.247 \\ 0.554 \end{Bmatrix}$$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，如圖 15。

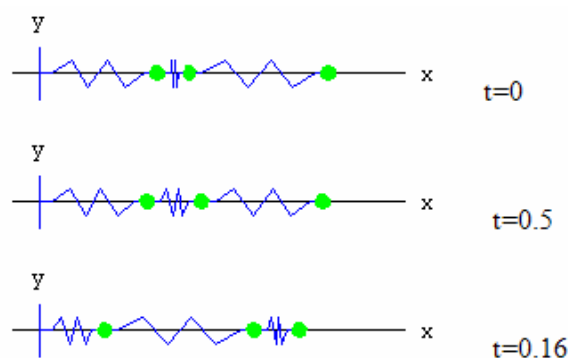


圖 15 為 3 個自由度之運動模態($\omega_3 = 1.803$)

2.2.2 連續系統(桿)

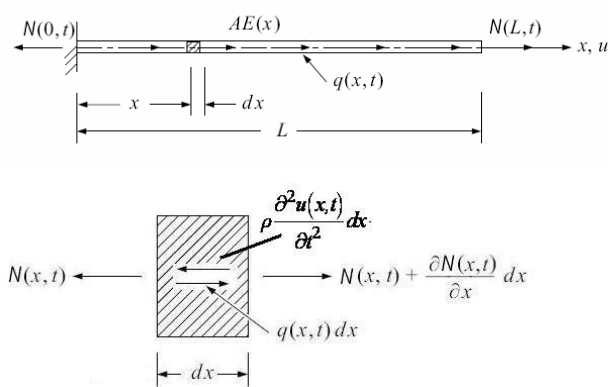


圖16 承受橫向載重的桿(左端固定，右端自由)

由力平衡得(作法同上個範例)

$$\begin{aligned} & -N(x,t) - \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \\ & + \left[N(x,t) + \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dx \right] + q(x,t) dx = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

代入邊界條件

$$\dot{X}(0) = \dot{X}(L) = 0 \quad (51)$$

當 $\lambda < 0$ 時，可假設

$$\lambda = -k^2 \quad (52)$$

得

$$\ddot{X}(x) = -k^2 X(x) \quad (53)$$

可令其解為

$$X(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx) \quad (54)$$

當其滿足(51)式之邊界條件時，可得

$$X(x) = \sin k_n x \quad (55)$$

其中， $k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$ ， $n=1,2,3,\dots$

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) &= -k^2 C^2 T(t) \\ T(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos(k_n C t) + q_n \sin(k_n C t) \end{aligned} \quad (56)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [p_n \cos k_n t + q_n \sin k_n t] \cdot \sin k_n x \quad (57)$$

得到

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{EA}{\rho L^2}} \quad (58)$$

因此 ω_n

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{\rho L^2}} \\ \omega_2 &= \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{\rho L^2}} \\ \omega_3 &= \frac{5\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{\rho L^2}} \end{aligned} \quad (59)$$

$$(1) \text{ 當 } \omega_1 = \frac{\pi}{2}, y_1 = \begin{Bmatrix} 0.3536 \\ 0.6124 \\ 0.7071 \end{Bmatrix}$$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，如圖 17 所示。

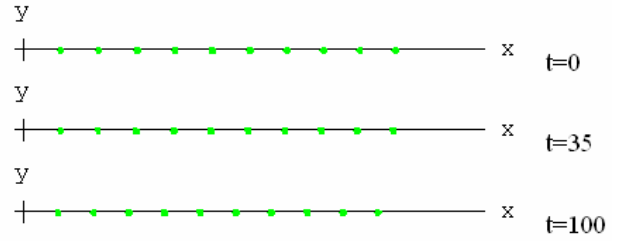


圖 17 為桿之運動模態($\omega_1 = 1.5707$)

$$(2) \text{ 當 } \omega_2 = \frac{3\pi}{2}, y_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，如圖 18 所示。

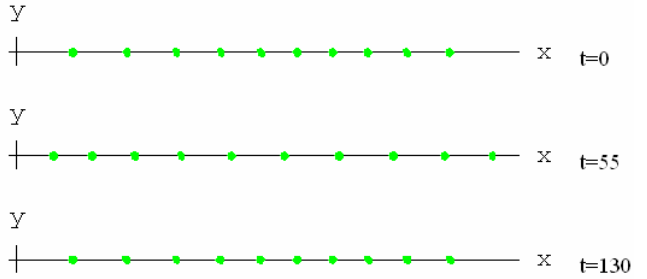


圖 18 為桿之運動模態($\omega_2 = 4.7123$)

$$(3) \text{ 當 } \omega_3 = \frac{5\pi}{2}, y_3 = \begin{Bmatrix} 0.3536 \\ -0.6124 \\ 0.7071 \end{Bmatrix}$$

藉由 Mathematica 模擬其振動模態，如圖 19 所示。

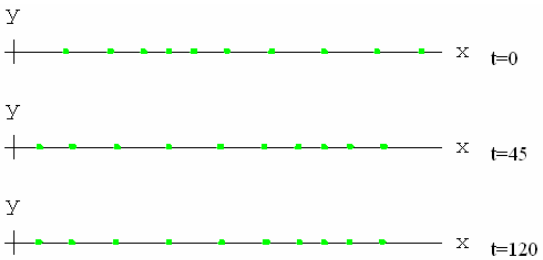


圖 19 為桿之運動模態($\omega_3 = 7.8539$)

3. 結論和建議

本文探討一維桿作自由振動時，可分別從離散系統和連續系統做分析。將數學及力學的結合在一起，並且將以前所學的力學觀念以數學形式來呈現。而離散部分先從力平衡的觀念建立勁度矩陣及質量矩陣，求得特徵值及特徵

向量，進而探討物體的運動模態；而連續系統的部份則是從控制方程式求得特徵值及特徵向量。最後，本文以Mathematica動畫呈現其運動行為，使讀者能可以有更深刻的體會，並且對於力學的觀念也更加清楚。本文不僅可以提供Mathematica動畫之初學者作為參考，亦可當作教學上的輔助教材，使學生對於力學與數學感覺更加深刻，產生興趣，也提升老師在上課時之效能。

4. 誌謝

能順利完成一篇論文真是不簡單，尤其當完成的那瞬間，雀躍與激動的心情更是無法用言語來形容，那份成就感全都歸功於陳正宗終身特聘教授細心般的規劃與指導。於這次的機緣下也讓我對桿之自由振動這塊領域有更深入的了解，對於正在學結構的我則有更深的感受與體會，讓我從一個不求甚解的人慢慢地使我腦袋中的齒輪再次的轉動起來，都忘記思考原來是一種樂趣，啟發我對事物的新鮮感，以及盡信書不如無書的道理。當我遇到不懂問題時，很感謝有高聖凱學長和李家瑋學長的引領使我有更清楚的觀念和思維，也很感謝詹雅馨同學和楊雅鈞同學的協助下，將動畫呈現的更淋漓盡致，同時也很感謝MSVLab. 各位學長的不吝教導，將他們所學的觀念傳授給我，讓我今天能夠順利的完成這篇論文，千言萬語道不盡我內心中的萬分的感謝及感恩，只能說在研究的路途中，遇到你們是我莫大的福氣。

5. 參考文獻

1. Bathe K.J and Edward L.W , Numerical methods in finite element analysis, Prentice-Hall, 1976.
2. Riley K.F, .Hobson M.P and .Bence S.J. ,Mathematical methods for physics and engineering, Third edition, Camdridge, 2006.

3. Lin T.Y., Shiau H.T. and Huang J.T., Decomposition of singular large sparse matrix by adding dummy links and dummy degrees, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*. Vol.15, No. 6, pp. 723-727, 1992.
4. 李天岩，回首來時路，數學傳播，31 卷 4 期，38 頁-42 頁，2001。
5. 容志輝，線性代數，五南，2007。
6. 王栢村，振動學，全華，台北，1991。
7. Rlough R.W., Joseph Penzien , Dynamics of structures, Second edition, McGraw-Hill, New York, 1993.

附錄

Mathematica 基本繪圖指令

Plot[f,{t,min,max}] :

繪出函數 $f(t)$ 在 $t = \min \sim \max$ 之圖形。

PlotStyle $\rightarrow$ {Style1,Style2,...} :

函數圖形的格式設定，如：顏色、出圖範圍、圖形的寬度等。

RGBColor[R,G,B] :

設定顏色，以紅、綠、藍三色間的比例表示。

Thickness[數值] :

設定圖形軌跡的寬度。

PlotRange $\rightarrow$ {{min,max},{min,max}} :

設定出圖範圍，前為 x 軸，後者為 y 軸。

Table[指令, {t,min,max,間隔}] :

迴圈指令，若迴圈內的指令為 Plot 便會呈現動畫的形式。