

Waves in string using Diamond rule and Mathematica software

高聖凱

指導老師：陳正宗特聘教授

國立台灣海洋大學 河海工程學系

關鍵詞：波動方程，Diamond rule，Mathematica

摘要

本論文以一維波動方程式作為切入點，探討目前的三種方法—映像法、Fourier 級數法、Diamond rule。藉由實例，闡述三種方法間的關係，再利用 Mathematica 軟體的動畫功能，將各方法所推算出的理論結果以動畫呈現，建構理論模型。

前言

在工程數學的一次繪圖作業中，開始接觸 Mathematica 軟體。在使用手冊中發現他的強大計算與繪圖功能，甚至還可以產生動畫，這讓當時開始接觸波動的我很感興趣。一般的數學繪圖軟體所能呈現的是一般靜態的圖畫，往往產生學習障礙。如果想知道現實中許多現象，並非畫一兩張圖便可以窺探的，更別想模擬現況。本論文擬以 Mathematica 為工具，以動畫的方式呈現波動方程式的解。藉由動畫的展現，分析波的特性，並分析映像法、Fourier 級數法與 Diamond rule 間的差異性，並加以分析這三者間的關係性。進而再深入探討與現實生活相關的波動問題，如消波塊、阻尼器等減震消波問題。

將 2 式除以 1 式的 k 可得：

$$\frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \frac{\rho}{k} \cdot (\Delta x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [3]$$

$$\frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\Delta x} = \frac{\rho}{k} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [4]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{k} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [5]$$

$$\ddot{u} = c^2 u'' \quad [6]$$

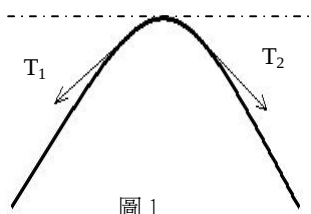
其中，為計算方便，令 $\frac{k}{\rho} = c^2$

此種平面活動的情況描述，即稱為一維波動方程（one-dimensional wave equation）。

文獻回顧與探討

1. 一維波動方程（one-dimensional wave equation）：

假設均勻而有完全彈性之繩索，在兩點張力及斜率分別為 T_1 、 $\tan \alpha$ 及 T_2 、 $\tan \beta$ 之作用下（如圖一），因沒有水平方向的運動，所以：



$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = k = \text{constant} \quad [1]$$

垂直方向依牛頓運動定律，可知：

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \cdot (\Delta x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad [2]$$

其中， ρ 為質量線密度。

2. D'Alembert 解法：

波動方程利用特徵線的概念，假設的解為：

$$u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct) \quad [7]$$

代入初始條件：

$$u(x, 0) = \phi(x) ; \dot{u}(x, 0) = \varphi(x)$$

則：

$$u(x, 0) = p(x) + q(x) = \phi(x) \quad [8]$$

$$\dot{u}(x, 0) = cp'(x) - cq'(x) = \varphi(x) \quad [9]$$

故可求得解為：

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(s) ds \quad [10]$$

3. 鑽石法則(Diamond Rule)：

一平面上 4 點，如圖 2，圍成一個平行四邊形，依據平行四邊形的特性可以得知：

$$a_1 + c_1 = b_1 + d_1 ; a_2 + c_2 = b_2 + d_2$$

若函數 $f(x)$ 為線性函數，即滿足：

$$f(x+ct) = f(x) + cf(t) \quad [11]$$

則：

$$f_a + f_c = f_b + f_d \quad [12]$$

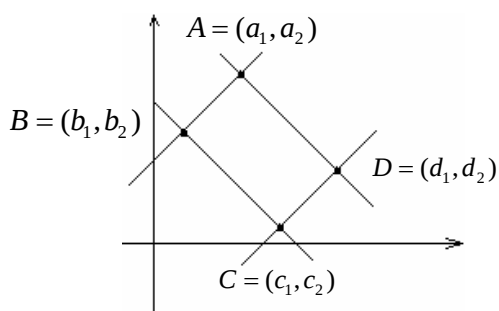


圖 2

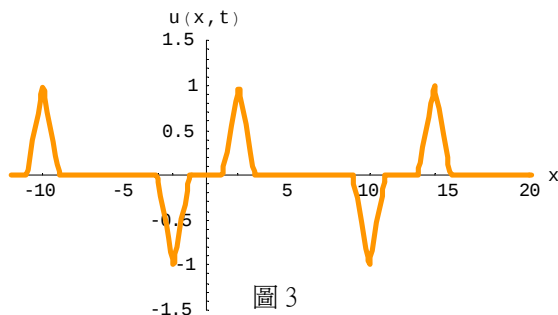


圖 3

(2) Diamond Rule :

利用特徵線，我們可以在 $x-t$ 圖中，將 $0 \sim 6$ 分成許多區間（如圖 4）。令 $f(x) = \phi(x) = \varphi(x)$ 透過 Diamond Rule，可得各區間的波動方程的解為：

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] \quad [13]$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(-x+ct)] \quad [14]$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) - f(12-(x+ct))] \quad [15]$$

$$u_4(x, t) = -\frac{1}{2} [f(-x+ct) + f(12-(x+ct))] \quad [16]$$

$$u_5(x, t) = -\frac{1}{2} [f(12-(x+ct)) - f(12-(-x+ct))] \quad [17]$$

$$u_6(x, t) = -\frac{1}{2} [f(-x+ct) - f(-12+(x+ct))] \quad [18]$$

$$u_7(x, t) = \frac{1}{2} [f(12-(-x+ct)) + f(-12+(x+ct))] \quad [19]$$

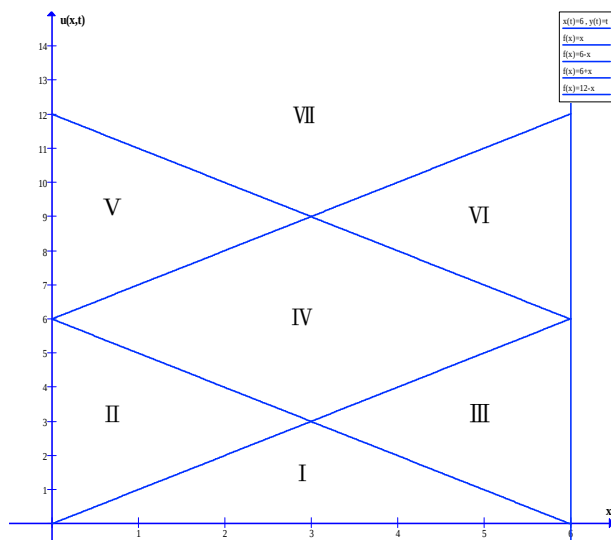


圖 4

4. Mathematica 基本繪圖指令：

Plot[f,{t,min,max}] :

繪出函數 $f(t)$ 在 $t = \min \sim \max$ 之圖形

PlotStyle $\rightarrow$ {Style1,Style2,...} :

函數圖形的格式設定，如：顏色、出圖範圍、圖形的寬度等。

RGBColor[R,G,B] :

設定顏色，以紅、綠、藍三色間的比例表示。

Thickness[數值] :

設定圖形軌跡的寬度。

PlotRange $\rightarrow$ {{min,max},{min,max}} :

設定出圖範圍，前為 x 軸，後者為 y 軸。

Table[指令, {t,min,max,間隔}] :

迴圈指令，若迴圈內的指令為 Plot 便會呈現動畫的形式。

固定繩波 (Fixed string)

若繩長為 6，其初始條件為：

$$\phi(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x < 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} ; \varphi(x) = 0$$

(1) 映像法：

以繩長 6 為一單位長，每一單位取一區間，而每一區間產生一個反對稱的影像（因端點固定不動，可假設有一反對稱波動）。依據 Huygen's Principle 可知，其所產生之反對稱影像即為新的波源，再利用新波源去產生反對稱影像。以此原則不斷往外產生影像，即可得圖 3。

(3) Fourier 級數法：

利用時空分離的觀念，將波動方程的解假設為：

$$u(x, t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \times P_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) \quad [20]$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } P_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ &= \frac{-12}{(n\pi)^2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right] \end{aligned}$$

(4) Mathematica 程式：

(A) 映像法：

```
Clear[s, im1, im2, im3, im4, f]
s[x_] := If[1 ≤ x < 2, x - 1,
  If[2 ≤ x ≤ 3, 3 - x, 0]]
im1[x_] :=
  If[-3 ≤ x < -2, -3 - x,
  If[-2 ≤ x ≤ -1, x + 1, 0]]
im2[x_] :=
  If[9 ≤ x < 10, 9 - x,
  If[10 ≤ x ≤ 11, x - 11, 0]]
im3[x_] :=
  If[-11 ≤ x < -10, 11 + x,
  If[-10 ≤ x ≤ -9, -9 - x, 0]]
im4[x_] :=
  If[13 ≤ x < 14, x - 13,
  If[14 ≤ x ≤ 15, 15 - x, 0]]
f[x_] :=
  1/2 (s[x + t] + s[x - t] +
    im1[x + t] + im1[x - t] +
    im2[x + t] + im2[x - t] +
    im3[x + t] + im3[x - t] +
    im4[x + t] + im4[x - t])
Table[Plot[f[x], {x, -20, 40},
  PlotRange →
    {{-12, 20}, {-1.5, 1.5}},
  AxesLabel → {"x", "u(x, t)"},
  PlotStyle →
    {RGBColor[1, 0.6, 0],
    Thickness[0.015]}],
{t, 0, 20, 1}]
```

(B) Diamond Rule：

```
Clear[f]
f[x_] := x - 1 /; 1 ≤ x < 2
f[x_] := 3 - x /; 2 ≤ x ≤ 3
f[x_] := 0 /; (x > 3 || x < 1)
u1[x_] :=
  If[(0 ≤ x ≤ 6 && x - t ≥ 0 && x + t ≤ 6),
  1/2 (f[x + t] + f[x - t]), 0]
u2[x_] :=
  If[(0 ≤ x && x - t ≤ 0 && x + t ≤ 6),
  1/2 (f[x + t] - f[-x + t]), 0]
u3[x_] :=
  If[(x ≤ 6 && x - t ≥ 0 && x + t ≥ 6),
  1/2 (f[x - t] - f[12 - (x + t)]), 0]
u4[x_] :=
  If[(x - t ≤ 0 && x + t ≥ 6 &&
    x + t ≤ 12 && x - t ≥ -6),
  -1/2 (f[12 - (x + t)] + f[-x + t]), 0]
u5[x_] :=
  If[(0 ≤ x && x - t ≤ -6 && x + t ≤ 12),
  -1/2
    (f[12 - (x + t)] - f[12 - (-x + t)]),
  0]
u6[x_] :=
  If[(x ≤ 6 && x - t ≥ -6 && x + t ≥ 12),
  -1/2 (f[-x + t] - f[-12 + (x + t)]), 0]
u7[x_] :=
  If[(x - t ≤ -6 && x + t ≥ 12 &&
    x + t ≤ 18 && x - t ≥ -12),
  1/2
    (f[12 - (-x + t)] + f[-12 + (x + t)]),
  0]
g[x_] := u1[x] + u2[x] + u3[x] +
  u4[x] + u5[x] + u6[x] + u7[x]
Table[Plot[g[x], {x, -1, 7},
  PlotStyle →
    {RGBColor[1, 0.7, 0],
    Thickness[0.015]},
  PlotRange → {{0, 6}, {-1.1, 1.1}}],
{t, 0, 12, 0.1}]
```

(C) Fourier 級數法：

$k = 10$

$u[x_]:=$

$$\sum_{n=1}^k \left(\sin\left[\frac{n\pi x}{6}\right] * \left(\frac{12}{(n\pi)^2} * \left(-\sin\left[\frac{n\pi}{2}\right] + 2 * \sin\left[\frac{\pi n}{3}\right] - \sin\left[\frac{\pi n}{6}\right] \right) * \cos\left[\frac{n\pi t}{6}\right] \right) \right)$$

Table[Plot[u[x], {x, -1, 7},
PlotStyle→
{RGBColor[1, 0.7, 0],
Thickness[0.015]},
PlotRange→
{0, 6}, {-1.1, 1.1}],
{t, 0, 18, 0.1}]

一邊固定一端自由之繩波 (Fixed – Free string)

若繩長為 6，其初始條件為：

$$\phi(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x < 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} ; \phi(x) = 0$$

(1) 映像法：

以繩長 6 為一單位長，每一單位取一區間，在左邊每一區間產生一個反對稱的影像（因端點固定不動，可假設有一反對稱波動），而右邊的每一個區間產生一個對稱的影像（因自由端，其斜率為 0，可假設有一對稱的波動與之作用）。依據 Huygen's Principle 可知，其所產生之反對稱與對稱影像即為新的波源，再利用新波源去產生反對稱與對稱之影像。同理，不斷地往外產生影像，即可得圖 5。

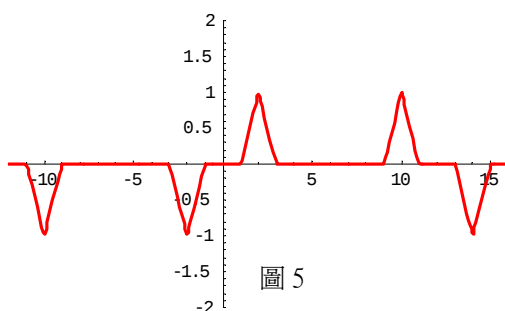


圖 5

(2) Diamond Rule：

利用特徵線，我們可以在 $x-t$ 圖中，將 0~6 分成許多區間（如圖 4）。令 $f(x) = \phi(x) = \varphi(x)$ 且 $u(0, t) = r(t)$ 透過 Diamond Rule，可得各區間的波動方程的解為：

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] \quad [21]$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(-x+ct)] \quad [22]$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) - f(12-(x+ct))] + r(-6+(x+ct)) \quad [23]$$

$$u_4(x, t) = -\frac{1}{2} [f(-x+ct) + f(12-(x+ct))] \quad [24]$$

$$u_5(x, t) = -\frac{1}{2} [f(12-(x+ct) - f(12-(-x+ct))] + r(-6+(x+ct)) - r(-6+(x+ct)) \quad [25]$$

$$u_6(x, t) = -\frac{1}{2} [f(-x+ct) - f(-12+(x+ct))] + r_1(-6+(x+ct)) \quad [26]$$

$$u_7(x, t) = \frac{1}{2} [f(12-(-x+ct) + f(-12+(x+ct))] - r(-6+(-x+ct)) + r_1(-6+(x+ct)) \quad [27]$$

(3) Fourier 級數法：

利用時空分離的觀念，將波動方程的解假設為：

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad [28]$$

初始條件：

$$u(x, 0) = \phi(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x < 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\dot{u}(x, 0) = \varphi(x) = 0$$

邊界條件：

$$u(0, t) = 0 ; u'(6, t) = 0$$

即可推得：

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-48}{(2n-1)^2 \pi^2} [\sin((2n-1)\pi/4) - 2\sin((2n-1)\pi/6) + \sin((2n-1)\pi/12)] \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{12}\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi t}{12}\right) \quad [29]$$

(4) Mathematica 程式：

(A) 映像法：

```

Clear[s, im1, im2, im3, im4, f]
s[x_] := If[1 ≤ x < 2, x - 1,
  If[2 ≤ x ≤ 3, 3 - x, 0]]
im1[x_] := If[-3 ≤ x < -2, -3 - x,
  If[-2 ≤ x ≤ -1, x + 1, 0]]
im2[x_] := If[9 ≤ x < 10, x - 9,
  If[10 ≤ x ≤ 11, 11 - x, 0]]
im3[x_] := If[-11 ≤ x < -10, -11 - x,
  If[-10 ≤ x ≤ -9, x + 9, 0]]
im4[x_] := If[13 ≤ x < 14, 13 - x,
  If[14 ≤ x ≤ 15, x - 15, 0]]
f[x_] :=
  1/2 (s[x + t] + s[x - t] + im1[x + t] +
    im1[x - t] + im2[x + t] + im2[x - t] +
    im3[x + t] + im3[x - t] + im4[x + t] +
    im4[x - t])
Table[Plot[f[x], {x, -20, 40},
  PlotRange → {{0, 6}, {-2, 2}},
  PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0],
  Thickness[0.01]}], {t, 0, 10, 0.1}]

```

(B) Diamond Rule :

```

Clear[f]
f[x_] := x - 1 /; 1 ≤ x < 2
f[x_] := 3 - x /; 2 ≤ x ≤ 3
f[x_] := 0 /; (x > 3 || x < 1)
r[x_] := f[6 - x]
r1[x_] := -f[-6 + x]
u1[x_] :=
  If[(0 ≤ x ≤ 6 && x - t ≥ 0 && x + t ≤ 6),
  1/2 (f[x + t] + f[x - t]), 0]
u2[x_] :=
  If[(0 ≤ x && x - t ≤ 0 && x + t ≤ 6),
  1/2 (f[x + t] - f[-x + t]), 0]
u3[x_] :=
  If[(x ≤ 6 && x - t ≥ 0 && x + t ≥ 6),
  1/2 (f[x - t] - f[12 - (x + t)]) +
  r[-6 + (x + t)], 0]
u4[x_] :=
  If[(x - t ≤ 0 && x + t ≥ 6 && x + t ≤ 12 &&
    x - t ≥ -6),
  -1/2 (f[-x + t] + f[12 - (x + t)]) +
  r[-6 + (x + t)], 0]

```

```

u5[x_] :=
  If[(0 ≤ x && x - t ≤ -6 && x + t ≤ 12),
  1/2 (f[12 - (-x + t)] - f[12 - (x + t)]) +
  r[-6 + (x + t)] - r[-6 + (-x + t)], 0]
u6[x_] :=
  If[(x ≤ 6 && x - t ≥ -6 && x + t ≥ 12),
  1/2 (f[-12 + (x + t)] - f[-x + t]) +
  r1[-6 + (x + t)], 0]
u7[x_] :=
  If[(x - t ≤ -6 && x + t ≥ 12 &&
    x + t ≤ 18 && x - t ≥ -12),
  1/2 (f[12 - (-x + t)] +
    f[-12 + (x + t)]) -
  r[-6 + (-x + t)] + r1[-6 + (x + t)], 0]
g[x_] := u0[x] + u1[x] + u2[x] +
  u3[x] + u4[x] + u5[x] + u6[x] + u7[x]
Table[Plot[g[x], {x, -1, 6},
  PlotStyle → {RGBColor[1, 0.7, 0],
  Thickness[0.015]},
  PlotRange → {{0, 6}, {-1.1, 1.1}},
  {t, 0, 12, 0.1}]

```

(C) Fourier 級數法 :

```

k = 10
u[x_] :=
  Sum[Sin[(2 * n - 1) * π * x / 12] *
    (48 / ((2 * n - 1) * π)^2 *
      (-Sin[(2 * n - 1) * π / 4] +
        2 * Sin[(2 * n - 1) * π / 6] -
        Sin[(2 * n - 1) * π / 12]) *
      Cos[(2 * n - 1) * π * t / 12]), {n, 1, k}]
Table[Plot[u[x], {x, -1, 7},
  PlotStyle → {RGBColor[1, 0.7, 0],
  Thickness[0.015]},
  PlotRange → {{0, 6}, {-1.1, 1.1}},
  {t, 0, 18, 0.1}]

```

結論

依據上述的兩個例子，可以整理出下列幾點：

1. 映像法只能討論簡單的波動問題，其必須具有邊端固定或邊端自由的條件，才能透過對稱波與反對稱波的形式來解析問題。若要探討更深入的問題，如添加組尼器、彈簧或不同介質間的波動問題，便顯不足。
2. Fourier 級數法在求解上，立竿見影，可得各時間之波動狀況。但在複雜的邊界條件之下，求解上更容易產生數學計算上的問題。此外，利用 Mathematica 軟體繪圖時，數值計算相當耗時，在討論簡單的波動問題時，便有大才小用之嘆。
3. 從上述簡單的波動問題中，利用 Mathematica 軟體所繪出的圖形做一比較，映像法所繪出的波動圖形是週期函數，其時間週期分別為 6 與 12，而 Fourier 級數法即可視成映像法的 Fourier 級數展開。此提供一個思維方向，有利映像法去討論複雜的波動問題；亦可提供 Fourier 級數法在解晰複雜邊界條件時，一個較容易解決的新方向。
4. 映像法與 Diamond rule 都有一個大問題：若要討論長時間後的波動狀況，便得花更多的時間推導後面的區間。以 Diamond rule 為例。此次推導，雖推到第 VII 區間，但所能討論的時間只到 12，若波動現象的時間週期大於 12，那便需要再往後推算，不如 Fourier 級數法便捷。
5. Diamond rule 在解決問題時，最主要的問題便在解決不同邊界所造成的 $r(x)$ ，其他的部分皆相同。以上述問題為例，固定繩波可視為 $r(x) = 0$ 之特例。在討論各種波動問題時，只須計算邊界條件所造成的 $r(x)$ 即可，便於程式之編寫與修改。

參考文獻

1. 陳正宗，“工程數學四”，基隆，海洋大學，2005。
2. 許桂敏，“工程數學”，台北市，全華科技圖書，2004。
3. 陳秋峰，“偏微分方程式”，台北市，超級科技圖書，2001。
4. 洪維恩，“數學運算大師 Mathematica4”，台北市，碁峰資訊，2001。
5. 余家銘，“Mathematica 程式設計風格與應用”，台北市，文魁資訊，2002。
6. Mustafa Inc, “On numerical Jacobi elliptic function solutions of the $(1 + 1)$ -dimensional dispersive long wave equation by the decomposition method”, *Applied Mathematics and Computation*, Volume 173, 372-382, 2006.
7. Yong Chen, Biao Li and Hongqing Zhang, “Exact solutions for two nonlinear wave equations with nonlinear terms of any order”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 10, 133-138, 2005.
8. Zhenya Yan, “Generalized transformations and abundant new families of exact solutions for $(2 + 1)$ -dimensional dispersive long wave equations”, *Computers & Mathematics with Applications*, Volume 46, 1363-1372, 2003.
9. Martha L. Abell and James P. Braselton, “Advancing the study of differential equations with technology”, *Mathematics and Computers in Simulation*, Volume 42, 493-508, 1996.
10. Mourad Bellassoued, “Decay of solutions of the wave equation with arbitrary localized nonlinear damping”, *Journal of Differential Equations*, Volume 211, 303-332, 2005.
11. Kailash C. Patidar, “Dispersion induced by the pollution for the wave equation”, *Applied Mathematics and Computation*, Volume 160, 329-341, 2005.
12. Hongqiu Chen, “Periodic initial-value problem for BBM-equation”, *Computers & Mathematics with Applications*, Volume 48, 1305-1318, 2004.
13. Oliver V. Atassi, “Nonreflecting boundary conditions for the time-dependent convective wave equation in a duct”, *Journal of Computational Physics*, Volume 197, 737-758, 2004.

14. Ryo Ikehata, “Kenji Nishihara and Huijiang Zhao, Global asymptotics of solutions to the Cauchy problem for the damped wave equation with absorption”, *Journal of Differential Equations*, 2006.
15. Romain Joly, “Generic transversality property for a class of wave equations with variable damping”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, Volume 84, 1015-1066, 2005