

多倒易法與對偶邊界元素法在一維特徵值問題的應用

翁煥昌¹ 陳正宗¹ 劉德源²

¹ 國立臺灣海洋大學河海工程研究所

² 國立臺灣海洋大學造船工程研究所

摘要

本文結合多倒易法與對偶邊界元素法針對一維的特徵值問題，分別探討在四種不同的邊界條件下，奇異方程 (UT) 與超奇異方程 (LM) 如何表現出互補的關係。在求解特徵值時，我們發現於混合邊界條件的算例中，若單由 UT 方程或 LM 方程解之，特徵值將出現增根的現象；此時必須聯合此兩種方法，刪除使特徵模態為無意義解之特徵值，方能確定真正的特徵值。特徵模態的尋求，對於 Dirichlet 邊界條件的算例而言，因 UT 方程所得之係數矩陣為零矩陣，造成邊界模態不唯一。若轉而由 LM 方程求解，可獨立解得邊界模態。而 Neumann 邊界條件的算例，其情況恰好與 Dirichlet 邊界條件的算例相反。從本文的算例結果發現，超奇異方程即使在簡單的一維問題中，仍有其重要性。

關鍵字：多倒易法、對偶邊界元素法與特徵值問題。

一、前言

在過去文獻中，邊界元素法已廣泛應用在實際工程問題上。例如 Darcy 流場、穩態熱傳、電磁場、地下水滲流與彈性扭轉等問題。而對偶邊界元素法針對含有退化邊界 [1, 2, 3, 4, 5]、角點 [6]、外域 [7] 與自適性網格生成 [8] 等問題，均需結合奇異方程 (UT) 與超奇異方程 (LM)，才能將問題迎刃而解。有關超奇異方程所扮演的角色可參考 [3]。

以往有關 Helmholtz 方程之求解，多半以複數基本解處理 [9]。為避免在複數域下求解，也可將 Helmholtz 方程中含特徵值項視為 Laplace 方程之外力源。但是當我們使用傳統邊界元素法，此外力源以倒易定理將導得內域積分項，因而使得在用邊界元素法求解時仍需對內域作離散，如此將失去邊界元素法的優點。經過許多學者的研究後，已有多種解決方案被提出，其中較為廣泛應用者為 Nowak 和 Brebbia 提出的多倒易法 MRM (Multiple Reciprocity Method) [9, 10]。多倒易法已成功地應用在二維與三維的 Helmholtz 方程。然而，在一維特徵值問題是否可行，並未見探討。雖然此法已應用在特徵值問題、流體力學與彈性力學等問題上，但卻因都只用到奇異方程 (UT) 而已，超奇異方程 (LM) 是否為求解的必要方程，則未見討論。亦即此方程在多倒易法所扮演的角色為何並不明確，此點正是本文所欲探討的主題。

本文結合多倒易法與對偶邊界元素法，藉由對一維特徵值問題的探討，來瞭解超奇異方程在求解特徵值問題中所佔之地位。此兩種方法 (UT 與 LM 法) 與多倒易法的結合，不僅保有邊界元素法只對邊界做離散的精神與優點，同時也可看出對偶邊界元素法中的奇異式與超奇異式在求解一維特徵值所擁有的互補角色。

二、問題描述與理論推導

考慮一維特徵值問題，其控制方程式如下：

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \lambda u(x) = 0 \quad (1)$$

其中， λ 與 $u(x)$ 分別表示特徵值與特徵函數。邊界條件則以四組算例分別描述如下

算例 1. $u(0) = 0, u(1) = 0$ (Dirichlet 問題)

算例 2. $t(0) = 0, t(1) = 0$ (Neumann 問題)

算例 3. $u(0) = 0, t(1) = 0$ (Robin 問題)

算例 4. $u(1) = 0, t(0) = 0$ (Robin 問題)

其中， $t(x_0) = \frac{du(x)}{dx}|_{x=x_0}$ 。引用輔助系統形式如下：

$$\frac{d^2 U(x, s)}{dx^2} = \delta(x - s) \quad (2)$$

其中 $U(x, s)$ 稱為基本解，可表為

$$U(x, s) = \frac{1}{2}|x - s| = U^{(0)}(x, s) \quad (3)$$

由格林恆等式或倒易定理 (reciprocity theorem) 可知

$$\int_{\Omega} (u(x) \nabla^2 U(x, s) - U(x, s) \nabla^2 u(x)) d\Omega \\ = \int_{\Gamma} (u(x) \frac{\partial U(x, s)}{\partial n} - U(x, s) \frac{\partial u(x)}{\partial n}) d\Gamma \quad (4)$$

其中, Ω 與 Γ 分別表示問題領域與邊界, n 表示邊界之法向量。取 $U(x, s)$ 為輔助系統, $u(x)$ 為欲解系統, 透過多倒易法簡化成一維問題時, 可推得下式

$$\int_0^1 \nabla^2 U^{(0)}(x, s) u(x) dx \\ = \int_0^1 U^{(0)}(x, s) \nabla^2 u(x) dx \\ + [u(x) \frac{dU^{(0)}(x, s)}{dx} - U^{(0)}(x, s) \frac{du(x)}{dx}] \Big|_{x=0}^{x=1} \quad (5)$$

將 (5) 式等號右邊第一項的內域積分項再利用倒易定理可得下式:

$$D^{(0)} = \int_0^1 U^{(0)}(x, s) \nabla^2 u(x) dx \\ = \int_0^1 \nabla^2 U^{(1)}(x, s) b^{(0)} dx \\ = \int_0^1 U^{(1)}(x, s) \nabla^2 b^{(0)} dx \\ + b^{(0)} \frac{dU^{(1)}(x, s)}{dx} - U^{(1)}(x, s) \frac{db^{(0)}}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} \quad (6)$$

其中,

$$\nabla^2 U^{(1)}(x, s) = U^{(0)}(x, s) \\ b^{(0)} = \nabla^2 u(x) = -\lambda u(x)$$

將 (6) 式等號右邊第一項再利用倒易定理可得下式

$$D^{(1)} = \int_0^1 U^{(1)}(x, s) \nabla^2 b^{(0)} dx \\ = \int_0^1 \nabla^2 U^{(2)}(x, s) b^{(1)} dx \\ = \int_0^1 U^{(2)}(x, s) \nabla^2 b^{(1)} dx \\ + [b^{(1)} \frac{dU^{(2)}(x, s)}{dx} - U^{(2)}(x, s) \frac{db^{(1)}}{dx}] \Big|_{x=0}^{x=1} \quad (7)$$

其中,

$$\nabla^2 U^{(2)}(x, s) = U^{(1)}(x, s) \\ b^{(1)} = \nabla^2 b^{(0)} = -\lambda(\nabla^2 u(x)) = (-\lambda)^2 u(x)$$

重複上述步驟, (5) 式中的內域積分形式, 可等效轉成邊界量的級數型式

$$D^{(0)} = \sum_{j=0}^N [b^{(j)} \frac{dU^{(j+1)}(x, s)}{dx} - U^{(j+1)}(x, s) \frac{db^{(j)}}{dx}] \Big|_{x=0}^{x=1} \\ + R_{N+1} \quad (8)$$

上述 R_{N+1} 為可忽略之餘項。則 $u(s)$ 場及 $t(s)$ 場可表成下式

$$u(s) = \{u(x) T^{(0)}(x, s) - U^{(0)}(x, s) t(x) \\ + \sum_{j=0}^N [b^{(j)} T^{(j+1)}(x, s) - U^{(j+1)}(x, s) \frac{db^{(j)}}{dx}] \Big|_{x=0}^{x=1} \\ + R_{N+1} \quad (9)$$

$$t(s) = \{u(x) M^{(0)}(x, s) - L^{(0)}(x, s) t(x) \\ + \sum_{j=0}^N [b^{(j)} M^{(j+1)}(x, s) - L^{(j+1)}(x, s) \frac{db^{(j)}}{dx}] \Big|_{x=0}^{x=1} \\ + R'_{N+1} \quad (10)$$

其中, 核函數級數表示式列於表 1, 其間關係可寫成如下

$$T^{(j+1)}(x, s) = \frac{\partial U^{(j+1)}(x, s)}{\partial x} \\ L^{(j+1)}(x, s) = \frac{\partial U^{(j+1)}(x, s)}{\partial s} \\ M^{(j+1)}(x, s) = \frac{\partial^2 U^{(j+1)}(x, s)}{\partial x \partial s}$$

而其他函數可分別寫成如下

$$b^{(j)}(x) = (-\lambda)^{(j+1)} u(x) \\ \frac{db^{(j)}(x)}{dx} = (-\lambda)^{(j+1)} u'(x) \\ R_{N+1} = \int_0^1 U^{(N+1)}(x, s) \nabla^2 b^{(n)} dx$$

當場點逼近到左右邊界時, 可導得 UT 式及矩陣形式可分列如下:

$$T_0 \underline{u} - U_0 \underline{t} = \sum_{i=1}^N (T_i(\lambda) \underline{u} - U_i(\lambda) \underline{t}) \\ \begin{bmatrix} 1 + T^{(0)}(0, 0^+) & -T^{(0)}(1, 0^+) \\ T^{(0)}(0, 1^-) & 1 - T^{(0)}(1, 1^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{(0)} \\ u^{(1)} \end{Bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} U^{(0)}(0, 0^+) & -U^{(0)}(1, 0^+) \\ U^{(0)}(0, 1^-) & -U^{(0)}(1, 1^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^{(0)} \\ t^{(1)} \end{Bmatrix} \\ = \sum_{j=0}^N \begin{bmatrix} -(-\lambda)^{j+1} T^{(j+1)}(0, 0^+) & (-\lambda)^{j+1} T^{(j+1)}(1, 0^+) \\ -(-\lambda)^{j+1} T^{(j+1)}(0, 1^-) & (-\lambda)^{j+1} T^{(j+1)}(1, 1^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^{(0)} \\ u^{(1)} \end{Bmatrix} \\ - \sum_{j=0}^N \begin{bmatrix} -(-\lambda)^{j+1} U^{(j+1)}(0, 0^+) & (-\lambda)^{j+1} U^{(j+1)}(1, 0^+) \\ -(-\lambda)^{j+1} U^{(j+1)}(0, 1^-) & (-\lambda)^{j+1} U^{(j+1)}(1, 1^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t^{(0)} \\ t^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

其中, u 和 t 為邊界量所組成的行向量。而 LM 式與矩陣式可分列如下:

$$M_0 u - L_0 t = \sum_{i=1}^N (M_i(\lambda) u - L_i(\lambda) t)$$

$$\begin{bmatrix} M^{(0)}(0, 0^+) & -M^{(0)}(1, 0^+) \\ M^{(0)}(0, 1^-) & -M^{(0)}(1, 1^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 + L^{(0)}(0, 0^+) & -L^{(0)}(1, 0^+) \\ L^{(0)}(0, 1^-) & -L^{(0)}(1, 1^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^N \begin{bmatrix} -(-\lambda)^{j+1} M^{(j+1)}(0, 0^+) & (-\lambda)^{j+1} M^{(j+1)}(1, 0^+) \\ -(-\lambda)^{j+1} M^{(j+1)}(0, 1^-) & (-\lambda)^{j+1} M^{(j+1)}(1, 1^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} - \sum_{j=0}^N \begin{bmatrix} -(-\lambda)^{j+1} L^{(j+1)}(0, 0^+) & (-\lambda)^{j+1} L^{(j+1)}(1, 0^+) \\ -(-\lambda)^{j+1} L^{(j+1)}(0, 1^-) & (-\lambda)^{j+1} L^{(j+1)}(1, 1^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix}$$

將表 1 核函數的一般式代入 (11) 與 (12) 兩式中, 可分別得到

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sum_{j=0}^N \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} \\ \sum_{j=0}^N \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \sum_{j=0}^N \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!} \\ -\sum_{j=0}^N \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sum_{j=0}^N \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} \\ \sum_{j=0}^N \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\sum_{j=0}^N \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} \\ \sum_{j=0}^N \frac{1}{2} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

依給定四組邊界條件, 代入 (13) 式與 (14) 式中, 可得以下對偶邊界元素的八組矩陣表示式如下:

算例 1.

UT 方程:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!}) \\ \frac{1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

LM 方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) \\ \frac{1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

算例 2.

UT 方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) \\ \frac{-1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

LM 方程:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} \\ -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

算例 3.

UT 方程:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) \\ \frac{1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

LM 方程:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} \\ \frac{1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

算例 4.

UT 方程:

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!}) \\ \frac{1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

LM 方程:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(1 + \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!}) \\ -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ t(1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

三、數值結果與討論

由式 (15)~(22) 所得的特徵方程式中, 若欲使未定邊界量有非零解, 則矩陣行列式值需為零, 才可得特徵值方程式, 此非線性方程, 可採用半區間法求其根。求得特徵值後, 可進一步求得特徵模態。為方便討論, 將四組算例的結果, 以七個表格加以說明, 其中表 2 到表 5 分別敘述了四組算例所得之特徵值級數方程式、邊界模態值、增根的現象與邊界模態值無法確

定的原因。表 6 為四組算例之解析解, 表 7 與表 8 則敘述不同的特徵值級數方程式收斂情形。從表中所得結果可討論得以下四點:

1. 表 2 與表 3 為算例一與算例二之結果, 可知不論由 UT 或 LM 方程式均可獨立求得特徵值。算例一係給定 Dirichlet 條件, UT 方程的係數矩陣會出現零矩陣, 無法由 UT 決定模態, 若轉由 LM 方程來求解, 可獨立解出特徵值與特徵模態。同樣地, 當算例二給定 Neumann 條件時, 因 LM 方程出現零矩陣的關係, 亦能轉由 UT 方程來獨立求解。由此可看出奇異方程 UT 與超奇異方程 LM 間的對偶互補關係。
2. 算例三與算例四從表 4 與表 5 可知單由 UT 方程或 LM 方程均出現特徵值增根的情形, 唯有聯合此兩組方程式, 刪除使特徵模態為無意義解的特徵值後, 才能判定出真正的特徵值, 此點亦再度展現奇異方程 UT 與超奇異方程 LM 間的對偶互補關係。
3. 特徵值隨 MRM 法中所取級數項數的增加而收斂, 可從表 1 的核函數級數表示式, 可知級數的收斂速度。模態數越高時, 特徵值與特徵函數收斂越慢, 在算例一與算例二中, 其特徵值級數方程式, 有單一級數形式與雙級數形式兩種, 如表 7 與表 8 所示, 特徵值較高時, 收斂情況則以前者較佳。
4. 本文結合 MRM 與 DBEM 方法, 僅使用到四個邊界自由度, 其中兩個又為邊界條件所決定, 故未束制自由度僅有兩個, 而仍能求解較高模態數的特徵值與特徵函數, 此點為有限元素法所不能及, 亦為本方法的一大優點。
5. 四組算例的第一模態如圖 1、圖 2、圖 3 與圖 4 所示, 可看出級數項數約五項時均已收斂, 而第一特徵值收斂效果亦非常快。
6. 四組算例所求得的係數矩陣 (式 (15)~ 式 (22)) 中的級數型元素, 均可表為閉合型式 (如 $\sin(\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda}, \cos(\sqrt{\lambda}), \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda})$)。從其型式可求得特徵值的解析解, 並可對例三與例四所產生增根的原因提出說明。

四、結論

本文我們結合多倒易法與對偶邊界元素法, 建構一維特徵值問題的理論推導, 並進行解析推導與數值計算, 結果發現對偶邊界元素法的超奇異方程, 扮演決定特徵值與特徵模態不可或缺的角色。文中四個算例已成功地驗證本文方法的可行性。

五、誌謝

本文為國科會專題計畫 (NSC 86-2211-E-019-006) 之部分研究成果, 承蒙國科會經費補助, 僅此誌謝。

References

- [1] H.-K. Hong and J. T. Chen, Derivation of Integral equations in Elasticity, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.114, No.6, Em5, pp.1028-1044, 1988.
- [2] 陳正宗與洪宏基, 邊界元素法, 484 面, 台北圖書, 台北, 1992。
- [3] J. T. Chen, On a Dual Integral Representation and Its Applications to Computational Mechanics, Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, National Taiwan University, 1994.
- [4] J. T. Chen and H.-K. Hong, Boundary Element Analysis and Design in Seepage Flow Problems with Sheet piles, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.17, No.1, pp.1-20, 1994.
- [5] J. T. Chen and H.-K. Hong, On the Dual Integral Representation of Boundary Value Problem in Laplace Equation, Boundary Element Abstracts, Vol.3, pp.114-116, 1993.
- [6] J. T. Chen and H.-K. Hong, Dual Boundary Integral Equations at a Corner Using Contour Approach around Singularity, Advances in Engineering Softwares, Vol.21, No.3, pp.169-178, 1994.
- [7] J. T. Chen, M. T. Liang and S. S. Yang, Dual Boundary Integral Equations for Exterior Problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.16, pp.333-340, 1996.
- [8] M. T. Liang, J. T. Chen and S. S. Yang, Error Estimation for Boundary Element Method, Computers and Structures, Accepted, 1996.
- [9] A. J. Nowak and A.C. Neves eds., The Multiple Reciprocity Boundary Element Method, Comp. Publ., Southampton, 1994.

- [10] A. J. Nowak and C. A. Brebbia, The Multiple Reciprocity Method — A New Approach for Transforming BEM Domain Integrals to the Boundary, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.6, No.3, pp.164-167, 1989.

Ocean University

Combinations of MRM and DBEM for one-dimensional eigenproblems

H. T. Wong¹ J. T. Chen¹ D. Y. Liou²

¹Department of Harbor and River

Engineering, Taiwan Ocean University

²Department of Naval Architecture, Taiwan

In this paper, the MRM(multiple reciprocity method) and DBEM(dual boundary element method) are combined to solve the one-dimensional eigenproblems. It is found that to employ the singular equation (*UT* method) or the hypersingular equation (*LM* method) alone can not determine both the eigenvalues and eigenmodes successfully. In the eigenvalue problem, *UT* and *LM* method show the complementary characteristic to each other.

Table 1: 一維核函數一般式 ($j = -1, 0, 1, \dots$)

$U^{(j+1)}(x, s)$		$T^{(j+1)}(x, s)$		$L^{(j+1)}(x, s)$		$M^{(j+1)}(x, s)$	
$x > s$	$x < s$	$x > s$	$x < s$	$x > s$	$x < s$	$x > s$	$x < s$
$\frac{1}{2} \frac{ r ^{2j+3}}{(2j+3)!}$	$\frac{1}{2} \frac{ r ^{2j+2}}{(2j+2)!}$	$\frac{-1}{2} \frac{ r ^{2j+2}}{(2j+2)!}$	$\frac{-1}{2} \frac{ r ^{2j+2}}{(2j+2)!}$	$\frac{1}{2} \frac{ r ^{2j+2}}{(2j+2)!}$	$\frac{1}{2} \frac{ r ^{2j+2}}{(2j+2)!}$	$\begin{cases} \frac{-1}{2} \frac{ r ^{2j+1}}{(2j+1)!}, & j \geq 0 \\ 0, & j = -1 \end{cases}$	

Table 2: 給定 Dirichlet 條件下, 算例一之特徵方程式與邊界模態數值分析表

B.C.		Dirichlet prob.	
		$u(0) = 0, u(1) = 0$	
		UT	LM
解析解		$(n\pi)^2$	
λ	吻合	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!} = -1$	(a) $\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = -2$ (b) $\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = 0$
特徵向量 $\{t(0), t(1)\}$		$\times$	$\{1, -1\}^{(a)} \{1, 1\}^{(b)}$
主因		零矩陣	

Table 3: 給定 Neumann 條件下, 算例二之特徵方程式與邊界模態數值分析表

B.C.		Neumann prob.	
		$t(0) = 0, t(1) = 0$	
		UT	LM
解析解		$(n\pi)^2$	
λ	吻合	(a) $\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = -2$ (b) $\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = 0$	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} = 0$
特徵向量 $\{u(0), u(1)\}$		$\{1, -1\}^{(a)} \{1, 1\}^{(b)}$	$\times$
主因			零矩陣

Table 4: 給定 Robin 條件下, 算例三之特徵方程式與邊界模態數值分析表

B.C.		Robin(mixed) prob.	
		$u(0) = 0, t(1) = 0$	
		UT	LM
解析解		$(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2$	
λ	吻合 (a)	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = -1$	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = -1$
	不合 (b)	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!} = -1$	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} = 0$
特徵向量 $\{u(1), t(0)\}$		$\{(-1)^{n+1}, \frac{(2n-1)\pi}{2}\}$	$\{(-1)^{n+1}, \frac{(2n-1)\pi}{2}\}$

Table 5: 給定 Robin 條件下, 算例四之特徵方程式與邊界模態數值分析表

B.C.		Robin(mixed) prob.	
		$u(1) = 0, t(0) = 0$	
		UT	LM
解析解		$(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2$	
λ	吻合 (a)	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = -1$	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = -1$
	不合 (b)	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!} = -1$	$\sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} = 0$
特徵向量 $\{u(0), t(1)\}$		$\{1, (-1)^n \frac{(2n-1)\pi}{2}\}$	$\{1, (-1)^n \frac{(2n-1)\pi}{2}\}$

Table 6: 四組算例之特徵值、特徵函數與邊界模態解析解

算例	1	2	3	4
λ_n	$(n\pi)^2$	$(n\pi)^2$	$(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2$	$(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2$
$u_n(x)$	$\sin(n\pi x)$	$\cos(n\pi x)$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2})$	$\cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2})$
boundary mode $\begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ t(0) \\ t(1) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0^* \\ 0^* \\ 1 \\ (-1)^n \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ (-1)^n \\ 0^* \\ 0^* \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0^* \\ (-1)^{n+1} \\ \frac{(2n-1)\pi}{2} \\ 0^* \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0^* \\ 0^* \\ (-1)^n \frac{(2n-1)\pi}{2} \end{Bmatrix}$

*: Given homogeneous B.C.

Table 7: 取捨項數與特徵方程式收斂性關係表

	case 1(UT)			case 3, case 4			case 2 (LM)		
N	λ			λ			λ		
解析 λ	$(n\pi)^2$			$(\frac{(2n-1)\pi}{2})^2$			$(n\pi)^2$		
	$\sum_{j=0}^{j=N} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+3)!} = -1$			$\sum_{j=0}^{j=N} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = -1$			$\sum_{j=0}^{j=N} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+1)!} = 0$		
N=0	6.00			2.0			0		
N=1	10.62*			2.53	9.46		5.99		
N=2	9.47			2.46			0		
N=3	9.91	24.63		2.46	17.98		9.475		
N=4	9.87			2.46			9.915	24.63	
N=5	9.87	35.75		2.46	21.96		9.865		
N=6	9.87	41.17	50.49	2.46	22.23	46.26	9.87	35.74	
N=7	9.87	39.35	78.08	2.46	22.20		9.86	41.46	50.49
N=8	9.87	39.49		2.46	22.20		9.86	39.34	
N=9	9.87	39.47	88.94	2.46	22.20	58.85	9.86	39.49	74.08
N=10	9.87	39.47	89.14	2.46	22.20	62.39	9.86	39.47	
N=11	9.87	39.47	88.82	2.46	22.20	62.62	9.86	39.47	86.95
N=12	9.87	39.47	88.82	2.46	22.20	61.69	9.86	39.47	89.15
N=13	9.87	39.47	88.82	2.46	22.20	61.68	9.86	39.47	
N=14	9.87	39.47	88.82	2.46	22.20	61.68	9.86	39.47	
解析解	9.87	39.47	88.82	2.46	22.20	61.68	9.86	39.47	88.82

*: 表示特徵級數最接近零的值

Table 8: 取捨項數與特徵方程式收斂性關係表

	case 1(LM), case 2(UT)				
J	λ			λ	
解析 λ	$(n\pi)^2$				
	$\sum_{j=0}^{j=N} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = -2$			$\sum_{j=0}^{j=N} \frac{(-\lambda)^{j+1}}{(2j+2)!} = 0$	
N=0	4.0			4.0*	
N=1	6.00			12	
N=2	7.58			7.58*	
N=3	9.48*			21.48	
N=4	9.52	10.30	31.70	9.53*	
N=5	9.87*			30.72	
N=6	9.85	50.35		9.87*	
N=7	9.86			37.07	46.59
N=8	9.87	67.14		9.87*	
N=9	9.87			37.07	46.59
N=10	9.87	80.36		9.87*	
N=11	9.87			39.18	88.52
N=12	9.87	87.05	132.78	9.87*	
N=13	9.87	88.54		39.48	136
N=14	9.87	88.54		39.48	
解析解	9.87	88.82	246	39.47	157.91

*: 表示特徵級數最接近零的值

