

**Analytical study and numerical experiments
for true and spurious eigensolutions
of a circular cavity using the CHEEF method**

報告人：陳義麟

國立台灣海洋大學河海工程研究所博士候選人
國立高雄海洋技術學院造船工程科講師

電子計算機於土木水利工程應用
國立中興大學，台中
2000年1月17日

邊界元素法解內域特徵值之發展：

- 複數邊界元素法，基本解為複數型。矩陣維度(60*120)
- De Mey採用實數部或虛數部邊界元素法，（1976）。矩陣維度(60*60)，有假根但未發現。
- Hutchinson 發現假根，以模態特性來判斷真假根（1978）。矩陣維度(60*60)
- Kamiya以多倒易法避免複數計算（1996）。矩陣維度(60*60)
- 葉為忠等以對偶多倒易法配合SVD技巧，過濾假根（1999）。矩陣維度(120*60)
- 陳正宗等以對偶實數部邊界元素法配合SVD技巧，過濾假根（1999）。矩陣維度(120*60)。
- 本文以實數部邊界元素CHEEF法配合SVD技巧，過濾假根（2000）。矩陣維度(62*60)

假根產生的原因：

採用實數部或虛數部邊界元素法，缺少虛部或實數的束制，因此秩數不足產生假根。

解析方法：

1. 採用可分離核函數(degenerate kernel function)。
2. 圓形循環矩陣特性(circulants)。
3. 奇異值分解法(SVD)。

邊界積分方程為

$$\pi u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x) u(s) dB(s) \\ - R.P.V. \int_B U(s, x) t(s) dB(s), x \in B$$

$R.P.V.$: 黎曼主值(Riemann Principal Value) ,

$C.P.V.$: 柯西主值(Cauchy Principal Value) ,

其中 u 為速度勢位 , B 為問題的邊界 , $U(x,s)$ 為基本解

$$t(s) = \frac{\partial u(s)}{\partial n_s} \quad , \quad T(s, x) \equiv \frac{\partial U}{\partial s} \quad .$$

域外點積分方程為

$$0 = \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - \int_B U(s, x) t(s) dB(s), x \in D^e$$

若為二維時，核函數分別為

$$U(s, x) = \text{Re al}\left(\frac{-i\pi H_0^{(1)}(kr)}{2}\right) = \frac{\pi Y_0(kr)}{2}$$

$$T(s, x) = \text{Re al}\left(\frac{-ik\pi}{2} H_1^{(1)}(kr) \frac{y_i n_i}{r}\right) = \frac{k\pi}{2} Y_1(kr) \frac{y_i n_i}{r}$$

其中， $Y_n(kr)$ 表示第二類 n 階Bessel函數， r 為場點與源點之間的距離， n_i 為源點的法向量之第 i 個分量，而 $y_i = s_i - x_i$ 。

CHEEF法之理論：

將邊界及域外之積分方程離散可得

$$[\bar{T}^B]\{u\} = [U^B]\{t\}$$

$$[T^e]\{u\} = [U^e]\{t\}$$

其中 $[\bar{T}^B] = [T^B - I\pi]$

上標 B 表邊界， e 表域外的領域。

考慮Dirichlet問題，即 $u = 0$

可得 $[U^B]\{t\} = 0$

$$[U^e]\{t\} = 0$$

改寫為 $[U^B]_{2N \times 2N} \{t\}_{2N \times 1} = 0$

$$[U^e]_{a \times 2N} \{t\}_{2N \times 1} = 0$$

其中下標 $2N$ 為邊界上的元素數， a 表增加的域外點數目

合併邊界及域外積分方程：

$$\begin{bmatrix} U_{2N}^B \\ U_a^e \end{bmatrix}_{(2N+a) \times 2N} \{t\}_{2N \times 1} = 0$$

可簡寫為： $[C]_{(2N+a) \times 2N} \{t\}_{2N \times 1} = 0$

CHEEF法結合SVD的技巧：

[C]做SVD分解

$$[C]_{m \times n} = [U]_{m \times m} [\Sigma]_{m \times n} [V^*]_{n \times n}$$

[U]為左酉矩陣，[V*] 為右酉矩陣，

[Σ] 為一有n個非零奇異值的對角矩陣

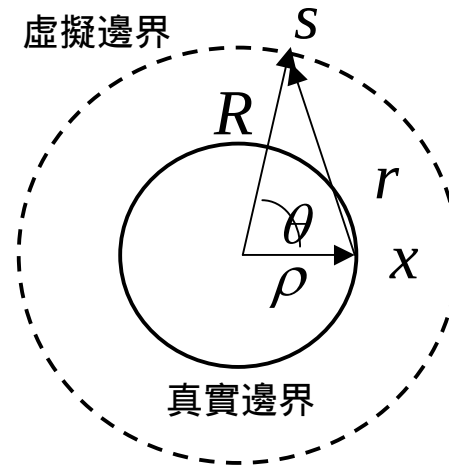
$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad m > n$$

其中 $\sigma_n > \sigma_{n-1} > \cdots > \sigma_1$

解析CHEEF法的失敗點：

$$U(s, x) = \frac{\pi Y_0(kr)}{2} = \frac{\pi}{2} Y_0(k\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \theta})$$

此處 $x = (\rho, \phi)$, $s = (R, \theta)$, ρ , r , R 與 θ 的相對關係如圖所示



[U]利用可分離核函數展開為

$$U(s, x) = \begin{cases} U(\theta, 0) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\pi}{2} Y_n(kR) J_n(k\rho) \cos(n\theta), & R > \rho, \\ U(\theta, 0) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\pi}{2} Y_n(k\rho) J_n(kR) \cos(n\theta), & R < \rho, \end{cases}$$

沿半徑R的虛擬邊界上分佈2N個常數源 對半徑 ρ 的真實邊界做排序可得：

$$[A] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2N-1} \\ a_{2N-1} & a_0 & \cdots & a_{2N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

其中

$$a_m = \int_{(m-1/2)\Delta\theta}^{(m+1/2)\Delta\theta} U(\theta,0)Rd\theta \approx U(\theta_m,0)R\Delta\theta, \quad m = 0,1,2,\dots,2N-1$$

其中 $\Delta\theta = \frac{2\pi}{2N}$, $\theta_m = m\theta$

[A]為圓形循環矩陣，可表為

$$[A] = a_0 I + a_1 C_{2N}^1 + a_2 C_{2N}^2 + \dots + a_{2N-1} C_{2N}^{2N-1}$$

$$C_{2N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2N \times 2N}$$

C_{2N} 的特徵值為 $\alpha_{2N} = 1$ 的根，即

$$\alpha_n = e^{i \frac{2\pi n}{2N}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), N$$

C_{2N} 的特徵向量為：

$$\{\phi\}_n = \begin{Bmatrix} \alpha_n^0 \\ \alpha_n^1 \\ \alpha_n^2 \\ \vdots \\ \alpha_n^{2N-1} \end{Bmatrix}$$

[A]的特徵值 λ 為：

$$\lambda_l = a_0 + a_1 \alpha_l + a_2 \alpha_l^2 + \dots + a_{2N-1} \alpha_l^{2N-1}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1), N$$

$$\det[A] = \lambda_0 \lambda_N (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{N-1}) (\lambda_{-1} \lambda_{-2} \cdots \lambda_{-(N-1)})$$

可得到

$$Y_l(k\rho)J_l(k\rho) = 0, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(N-1), N.$$

即真根產生在

$$J_l(k\rho) = 0$$

假根產生在

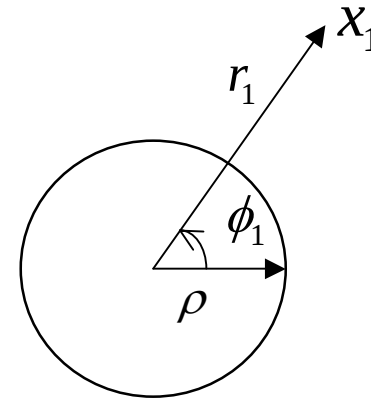
$$Y_l(k\rho) = 0$$

增加束制方程式

1.採取一個域外點：

$$0 = \int_B U(s, x) t(s) dB(s) = [w_1^T] \{t\}$$

其中 $[w_1^T] = (w_1^1, w_1^2, w_1^3, \dots, w_1^{2N})$



合併得 $\begin{bmatrix} A(k) \\ w_1^T(k) \end{bmatrix} \{t\} = 0$,

增加點提供如下的判別式

$$\Delta = [w_1^T] \{t\} = \pi^2 r_1 J_0(k\rho) Y_0(kr_1) e^{in\phi_1}$$

$$\Delta = [w_1^T] \{t\} = \pi^2 r_1 J_0(k\rho) Y_0(kr_1) e^{in\phi_1} = 0$$

表示唯有選擇的點恰好使 $Y_0(kr_1) = 0$, 否則便可過濾掉所有假根的單根。

A.單根的失敗點：

在輻射模態的節點上，當 $r_1 = \frac{k_{0,p}}{k_{0,m}}$, $m < p$ 時無法過濾掉 $k_{0,m}$ 的假根，其中下標 m 及 p 分別表示第 m 及第 p 個 Y_0 等於零。

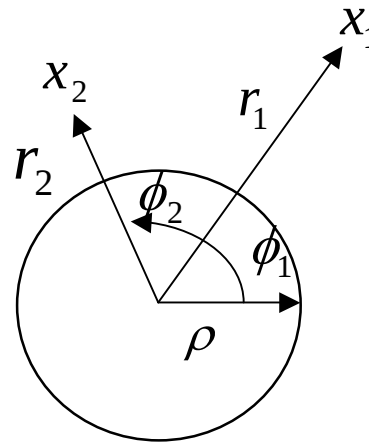
B.重根或雙根因為秩數降2，因此只有一個增加的束制方程式無法去除重根的假根。

2.採取二個域外點：

$$\begin{bmatrix} A(k) \\ w_1^T(k) \\ w_2^T(k) \end{bmatrix} \{t\} = 0,$$

$$[w_1^T] = (w_1^1, w_1^2, w_1^3, \dots, w_1^{2N})$$

$$[w_2^T] = (w_2^1, w_2^2, w_2^3, \dots, w_2^{2N})$$



兩域內點提供下列判別式

$$\Delta = r_1 r_2 J_n(k\rho) J_n(k\rho) Y_n(kr_1) Y_n(kr_2) 2i \sin(n\phi)$$

$$\Delta = r_1 r_2 J_n(k\rho) J_n(k\rho) Y_n(kr_1) Y_n(kr_2) 2i \sin(n\phi) = 0$$

其中 $\phi = \phi_1 - \phi_2$ 表示兩內域點之夾角。

由判別式指出：

1. 如果兩點之交角 ϕ 使得為 $n\phi = \pi$ ，去除重根 Y_n ，將會失敗。
2. 如果兩點使得 $Y_n(kr_1) = 0$ 或 $Y_n(kr_2) = 0$, $n=1, 2, 3, \dots$ 則去除重根將會失敗。
3. 如果所選取點的位置加以適當選擇，則所需點的數目毋須多於兩點便可去除假根。

結論

- 以分離核函數及循環矩陣特性解析探討內域問題真假特徵值產生的機制。
- 使用CHEEF方法結合SVD技巧，解決二維圓柱之內域問題採用實部BEM法產生假特徵值的問題。
- 如果適當的選擇，則只要兩點即可過濾假特徵值。