

# 二維圓柱外域 Helmholtz 場虛擬頻率產生機制之探討

陳義麟

國立台灣海洋大學河海工程研究所博士班研究生

國立高雄海洋技術學院造船工程科講師

## 摘要

本文主要目的係以對偶邊界積分方程為基礎，探討虛擬頻率發生的機制，並以對偶級數模式理論推導虛擬頻率所發生的位置，且採用直接法的對偶邊界元素法作數值實驗來驗證此理論。研究結果顯示，虛擬頻率發生的位置與使用的數值方法中的核函數有關，而與該外域問題所給定的邊界條件型式無關，並以二維 Helmholtz 方程為範例驗證此一結論。

## 一.前言

當一單自由度振動系統承受含自然頻率之外力激發時，會產生振動放大的現象，此種現象稱為共振，此為自然發生的物理現象，在數學與物理上均可反應此事實。然而，於積分方程解外域荷姆茲 (Helmholtz) 場問題時，會發生數值不穩定的虛擬頻率 (fictitious frequency)，又可稱為寄生頻率 (parasite frequency) 或稱之為不規則頻率 (irregular frequency)，此非自然現象，乃是因採取的數值方法過程中所衍生的問題，因為在純解析推導時並不產生此種問題 (陳與洪，1992)。為了克服此種問題，Schenck (1968) 最早使用 CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) 法，以域內點邊界積分方程式為輔助條件，補足不夠的束制條件。此法所選取的點若不巧為內域問題模態的結點 (node) 時則將會失效，亦即得到的是無效的方程式 (trivial equation)，此問題在愈高頻時發生的可能性就愈高 (Seybert & Rengarajan 1989)。後來 Burton & Miller (1971) 及 Lee & Sclavounos (1989)，亦曾提出合成奇異積分方程式與超奇異積分方程式的純虛數倍的方法，可在任意波數下均可得唯一解 (Cunefare & Koopmann 1989)，此技巧可說是將波數軸的極點移離實軸，即可避免虛擬頻率的發生。此法雖有對偶積分的架構，但不同的是使用時係只

用一個合成式，在含退化邊界問題的應用上，仍然有其盲點。而對偶邊界元素法使用兩式，可同時解決退化邊界與虛擬頻率的問題，有關對偶積分架構在計算力學所扮演的角色，陳與洪有一回顧性文章之中有詳細討論 (陳與洪，1998)。若改以有限元素法分析外域聲場問題，雖無所謂的解不唯一的虛擬頻率問題，但為了滿足遠域輻射條件，需引入無限元素的觀念，DtN (Dirichlet to Neumann) 法 (Givoli *et al.*, 1997) 即為一例，Malenica & Chen (1998) 利用改變對應虛擬內域的邊界來確保所有頻率下解的唯一性。因虛擬頻率係伴隨在我們所使用的積分方程中，故在陳與洪 (1992) 的書中稱虛擬頻率為寄生的數值共振頻率，而非實際的物理問題。此點更可由聲波、水波、彈性波、電磁波、浮體工程、置入物 (inclusion) 波場、聲波結構互制、流體結構互制、土壤結構互制 (李，1992) 與聲場全像術等領域的研究均會遭遇到，且可看出問題的數學本質是一致的。而其數值觀點則可視為  $0/0$  的數值不定型。雖然理論上可使用 L'Hospital 法則予以克服，但是數值執行上卻有其困難。

文獻上對於虛擬頻率所發生位置，Shaw (1979) 曾提出：“外域的 Dirichlet 問題所產生的虛擬頻率會對應到內域 Neumann 問題的共振頻率，而外域的 Neumann 問題所產生的虛擬頻率會對應到內域 Dirichlet 問題的共振頻率”，Martin (1980) 也曾提

出：“一個外域的 Dirichlet 問題所產生的虛擬頻率會對應到內域的 Neumann 問題的特徵頻率”，Rizzo 等(1985)，Rezayat 等(1986)及 Huang 與 Fan(1991) 都以為外域問題的邊界條件型式會影響虛擬頻率發生的位置，其中 Rizzo 等(1985)指出“*Fictitious eigenvalues are equal to eigenvalues of interior domain “with reverse” boundary conditions.*”，然而 Wu 與 Seybert(1991)卻提及“*The exterior Dirichlet integral equation formulation breaks down or yields a nonunique solution at the eigenvalues of the corresponding interior Dirichlet problem*”。在 SYSNOISE 的商業軟體(NIT, 1989)亦曾提及此論點。以上觀點均有矛盾之處，亦即影響虛擬頻率發生的因素，可能跟問題給定邊界條件的型式(Dirichlet 或 Neumann 型)、解表示式中核函數的型式(U, T, L 與 M)、積分方程的型式(Fredholm 或 Volterra 型)、積分方程的類別(第一類或第二類)、對偶積分方程的第一式或第二式、BEM 的方法(直接法或間接法)、奇異源分佈的位置...等有關。Chen(1998)以對偶級數模式中核函數的兩個基底 Wronskian 值，解析探討外域聲場的虛擬頻率問題，並以對偶邊界元素的數值方法配合矩陣的行列式值、秩數、條件數予以釐清真正影響虛擬頻率發生位置的原因，陳等(1998)並曾以一維為例，說明解的積分表示式中的核函數會影響虛擬頻率的位置。本文將以二維 Helmholtz 方程為範例，使用不同的數值方法及不同的核函數來說明影響虛擬頻率發生位置的可能原因。

## 二. 理論推導

### 2.1 控制方程式及對偶邊界積分方程式

(1) 對偶積分架構(直接法)：

線性化聲波方程式的控制方程式為

$$\nabla^2 u(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + Q(x, t), \quad x \in D \quad (1)$$

其中  $u$  為速度勢位， $D$  為問題的定義域， $c$  為聲速， $Q(x, t)$  為聲源項。若無聲源項，則在頻率域的控制方程式(1)可改寫成

$$\nabla^2 \bar{u}(x) + k^2 \bar{u}(x) = 0, \quad x \in D \quad (2)$$

其中  $\bar{u}$  為  $u$  的 Fourier 轉換， $k$  為波數， $k = \omega/c$ ， $\omega$  為角頻率。

定義基本解  $U(x, s)$  滿足下式

$$\nabla^2 U(x, s) + k^2 U(x, s) = 2\pi \delta(x - s) \quad (3)$$

其中  $\delta$  為 Dirac delta 函數。引入格林第三恆等式，可得到域內點(外域問題)對偶積分式的第一式如下：

$$2\pi u(x) = \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - \int_B U(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in D \quad (4)$$

式中  $B$  代表邊界，針對外域聲場的虛擬頻率問題或含退化邊界問題，需要得到足夠的束制方程式，因此將法向微分運算子作用到上式後，可得第二式

$$2\pi t(x) = \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - \int_B L(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in D \quad (5)$$

其中， $t(s) = \frac{\partial u(s)}{\partial n_s}$  且為速度勢位法向導微，而

$U, T, L, M$  分別代表對偶積分模式的四個核函數。

且  $T(s, x) = \frac{\partial U}{\partial n_s}$ ， $L(s, x) = \frac{\partial U}{\partial n_x}$ ，

$$M(s, x) = \frac{\partial^2 U}{\partial n_s \partial n_x}。$$

若為二維時，對偶積分模式的四個核函數分別為

$$U(s, x) = \frac{-i\pi H_0^{(1)}(kr)}{2} \quad (6)$$

$$T(s, x) = \frac{-ik\pi}{2} H_1^{(1)}(kr) \frac{y_i n_i}{r} \quad (7)$$

$$L(s, x) = \frac{ik\pi}{2} H_1^{(1)}(kr) \frac{y_i \bar{n}_i}{r} \quad (8)$$

$$M(s, x) = \frac{-ik\pi}{2} \left\{ -k \frac{H_2^{(1)}(kr)}{r^2} y_i y_j n_i \bar{n}_j + \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r} n_i \bar{n}_i \right\} \quad (9)$$

其中， $H_n^{(1)}(kr)$  表示第一類  $n$  階 Hankel 函數， $r$  為場點與源點之間的距離， $n_i$  為源點的法向量之第  $i$  個分量，而  $y_i = s_i - x_i$ ， $\bar{n}_i$  為場點的法向量之第  $i$  個分量。以上核函數間滿足對偶積分架構的對偶關係如下所示：

$$U(s, x) = U(x, s) \quad (10)$$

$$T(s, x) = L(x, s) \quad (11)$$

$$M(s, x) = M(x, s) \quad (12)$$

當  $x$  推到邊界時，則可得邊界點的對偶積分方程如下：

$$\begin{aligned} \alpha u(x) &= C.P.V. \int_B T(s, x) u(s) dB(s) \\ &- R.P.V. \int_B U(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in B \end{aligned} \quad (13)$$

同理可得直接法邊界積分第二式如下：

$$\begin{aligned} \alpha t(x) &= H.P.V. \int_B M(s, x) u(s) dB(s) \\ &- C.P.V. \int_B L(s, x) t(s) dB(s), \quad x \in B \end{aligned} \quad (14)$$

其中， $\alpha$  與體角有關，在平滑邊界時， $\alpha = \pi$ 。R.P.V. 代表黎曼主值(Riemann Principal Value)，C.P.V. 代表柯西主值(Cauchy Principal Value)，H.P.V. 代表阿達馬主值(Hadamard Principal Value)。

## (2). 對偶積分架構(間接法)

若採用間接法第一類(單層勢能法)，則可得

$$u(x) = \int_{B'} U(s, x) \phi(s) dB(s) \quad (15)$$

$$t(x) = \int_{B'} L(s, x) \phi(s) dB(s) \quad (16)$$

式中  $B'$  可為虛擬邊界或問題給定的真實邊界， $\phi(s)$  代表單層源密度函數。若採用間接法第二類(雙層勢能法)，則可得

$$u(x) = \int_{B'} T(s, x) \varphi(s) dB(s) \quad (17)$$

$$t(x) = \int_{B'} M(s, x) \varphi(s) dB(s) \quad (18)$$

式中  $\varphi(s)$  代表雙層源密度函數。

## 2.2 虛擬頻率發生機制之理論證明

若選取  $J_m(kx)$  及  $Y_m(kx)$ ， $m \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ，為

兩個獨立基底函數，分別滿足

$$(\nabla^2 + k^2) J_m(kx) = 0, \quad x \in R^2, \quad (19)$$

$$(\nabla^2 + k^2) Y_m(kx) = 0, \quad x \in R^2, \quad (20)$$

定義 Wronskian 值， $W$ ，如下：

$$\begin{aligned} W(J_m(kx), Y_m(kx)) &= \\ &\{J_m(kx) \nabla Y_m(kx) \cdot n - Y_m(kx) \nabla J_m(kx) \cdot n\} = \\ &\begin{vmatrix} J_m(kx) & \nabla J_m(kx) \cdot n \\ Y_m(kx) & \nabla Y_m(kx) \cdot n \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

根據  $J$  與  $Y$  此兩個基底函數，可將  $U(s, x)$ ， $T(s, x)$ ，

$L(s, x)$ ， $M(s, x)$  核函數以對偶級數模式表示如下

$$U(s, x) = \begin{cases} U^i(s, x) = \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} C_m(ks) J_m(kx), \quad x \in D^i \\ U^e(s, x) = \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} C_m(kx) J_m(ks), \quad x \in D^e \end{cases} \quad (22)$$

$$T(s, x) = \begin{cases} T^i(s, x) = \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} \{\nabla_s C_m(ks) \cdot n(s)\} J_m(kx), \quad x \in D^i \\ T^e(s, x) = \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} C_m(kx) \{\nabla_s J_m(ks) \cdot n(s)\}, \quad x \in D^e \end{cases} \quad (23)$$

$$L(s, x) = \begin{cases} L^i(s, x) = \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} C_m(ks) \{\nabla_x J_m(kx) \cdot n(x)\}, \quad x \in D^i \\ L^e(s, x) = \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} \{\nabla_x C_m(kx) \cdot n(x)\} J_m(ks), \quad x \in D^e \end{cases} \quad (24)$$

$$M(s, x) = \begin{cases} M^i(s, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} \{\nabla_s C_m(ks) \cdot n(s)\} \\ \{\nabla_x J_m(kx) \cdot n(x)\}, \quad x \in D^i \\ M^e(s, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} \{\nabla_x C_m(kx) \cdot n(x)\} \\ \{\nabla_s J_m(ks) \cdot n(s)\}, \quad x \in D^e \end{cases} \quad (25)$$

其中， $C_m(kx)$  為複數函數，

$C_m(kx) = J_m(kx) + iY_m(kx)$ ，而  $J_m(k_n x)$  表示在特徵波數  $k_n$  時之特徵模態。 $Y_m(kx)$  則為

$C_m(kx)$  的虛部。 $c_m$  可由 Wronskian 值決定， $D^i$  與  $D^e$  分別表示由邊界  $B$  所隔開的內域與外域領域。而為簡單化起見取一圓形例，在此將  $\nabla\{\} \cdot n$  簡化為“ $\cdot$ ”，對於外域問題用可分離核函數(degen-erate kernel)式(22)~(25)

代入式(6)與(7)，可得到外域問題的  $UT$  與  $LM$  代數方程式如下：

$$\lim_{x \rightarrow x_B} \begin{bmatrix} C_m(kx_B) J_m(kx) & -k C'_m(kx_B) J_m(kx) \\ k C_m(kx_B) J'_m(kx) & -k^2 C'_m(kx) J'_m(kx_B) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_m \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

其中， $x_B$  為推到邊界的邊界點， $u_m$  與  $t_m$  為  $u$  與  $t$  的廣義座標。第一式是由  $UT$  法得到，第二式則由  $LM$  法得到。重新整理可得下式

$$\begin{bmatrix} J_m(kx_B) & 0 \\ 0 & J'_m(kx_B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_m(kx_B) & -k C'_m(kx_B) \\ k C_m(kx_B) & -k^2 C'_m(kx_B) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_m \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

在 (27) 式中第一個矩陣定義為前乘矩陣 (premultiplying matrix)  $[S]$ ，即

$$[S] = \begin{bmatrix} J_m(kx_B) & 0 \\ 0 & J'_m(kx_B) \end{bmatrix} \quad (28)$$

對輻射問題而言：不論任何邊界條件， $UT$  法及  $LM$

法在某些特定的波數( $k_{UT}$  或  $k_{LM}$ )下, 均會得到如下無效之等式:

當  $J_m(k_{UT}x_B) = 0$ ,  $UT$  式得到  $0 = 0$  之等式。

當  $J'_m(k_{LM}x_B) = 0$ ,  $LM$  式得到  $0 = 0$  之等式。

上述  $k_{UT}$  及  $k_{LM}$  分別代表  $UT$  法及  $LM$  法的虛擬頻率。換言之, 對邊界未知量( $u_m$  與  $t_m$ )的未定係數而言, 等於是在求一個  $0/0$  之問題。這表示邊界條件不能改變虛擬頻率的位置, 而僅有解的積分表示式能影響虛擬頻率的位置。

### 2.3. 對偶邊界積分方程的離散化

若將對偶邊界積分方程式(6)與(7)離散, 則可得對偶邊界元素法的兩個代數方程式如下所示:

$$[T(k) - \pi I]\{u\} = [U(k)]\{t\} \quad (29)$$

$$[M(k)]\{u\} = [L(k) + \pi I]\{t\} \quad (30)$$

其中,  $[U]$ ,  $[T]$ ,  $[L]$ 與 $[M]$ 為  $U$ ,  $T$ ,  $L$  與  $M$  核函數對應之影響係數矩陣, 詳見陳等人(1998)。

### 2.4 數值實驗

數值實驗例題係取 Harari 等(1998)之例題予以比較, 說明如下:

[例一]、圖 1 係半徑  $a=1$  公尺二維圓柱之外域聲波輻射問題, 邊界條件為 Neumann 型, 即

$$t(a, \theta) = \frac{-kH_5^{(1)}(ka) + \frac{4}{r}H_4^{(1)}(ka)}{H_4^{(1)}(ka)}$$

今考慮 60 個常數元素, 並以行列式直接搜尋法(洪與劉, 1992)繪出  $|\det\{-[\bar{T}(k)] + 2\pi[I]\}|$  對  $k$  的圖形, 其中  $[\bar{T}(k)] = [T(k) - \pi I]$ , 如圖 5d 所示, 及  $|\det[M(k)]|$  對  $k$  的圖形, 如圖 6d 所示, 其局部最小值即為外域的虛擬頻率。此例之解析解為

$$u(r, \theta) = \frac{H_4^{(1)}(kr)}{H_4^{(1)}(ka)} \cos(4\theta), \text{ 當 } k=1.0 \text{ 的解析解如圖 3 所示, 數值解則如圖 4 所示, 兩者結果相當吻合。}$$

[例二]、圖 2 係半徑  $a=1$  公尺二維圓柱之外域聲波輻射的虛擬頻率問題, 邊界條件為 Dirichlet 型, 即  $u(a, \theta) = \cos(4\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。本例之解析解亦為

$$u(r, \theta) = \frac{H_4^{(1)}(kr)}{H_4^{(1)}(ka)} \cos(4\theta), \text{ 參考圖 3 所示。}$$

以直接搜尋法繪出  $|\det[U(k)]|$  對  $k$  的圖形, 如圖 5c 所示, 及  $|\det\{-[\bar{L}(k)] + 2\pi[I]\}|$  對  $k$  的圖形, 如圖 6c 所示, 其中  $[\bar{L}(k)] = [L(k) + \pi I]$ 。

圖 5a 為 Dirichlet 條件內域問題由直接法第一式( $UT$ )得到的內域矩陣  $U^i$  行列式絕對值對不同  $k$  值作圖, 其局部最小值為共振波數, 圖 5b 為 Dirichlet 條件內域問題由直接法第二式( $LM$ )得到的內域矩陣  $L^i$  行列式絕對值對不同  $k$  值作圖, 其局部最小值為共振波數, 由圖 5c 與 d 可看出外域問題的虛擬頻率發生的位置, 圖 5 中矩陣的上標“i”及“e”分別表示內域與外域, 圖 5 則為此四個圖的對照圖。由圖 5a 與 b 可知道內域問題的共振頻率與使用解的積分方程( $UT$  或  $LM$  法)無關, 而與所給定的邊界條件型式有關。而由圖 5c 與 d 可知道外域問題虛擬頻率產生的位置與使用解的積分方程( $UT$  或  $LM$  法)有關, 而與所給定的邊界型式無關。

圖 6a 為 Neumann 條件內域問題由直接法第一式( $UT$ )得到的內域矩陣  $T^i$  行列式絕對值對不同  $k$  值作圖, 其局部最小值為共振波數, 圖 6b 為 Neumann 條件內域問題由直接法第二式( $LM$ )得到的內域矩陣  $M^i$  行列式絕對值對不同  $k$  值作圖, 其局部最小值為共振波數, 由圖 6c 與 d 可看出外域問題的虛擬頻率發生的位置, 圖 6 為四個圖的對照圖。同樣的由圖 6a 與 b 可知道內域問題的共振頻率與使用解的積分方程( $UT$  或  $LM$  法)無關, 而與所給定的邊界型式有關。同樣的由 6c 與 d 可知道外域問題的虛擬頻率產生的位置與使用解的積分方程( $UT$  或  $LM$  法)有關, 而與所給定的邊界條件型式無關。

表 1. 分別為 Neumann 及 Dirichlet 邊界條件內域問題的特徵值表, 外域問題的虛擬頻率會與其相對應, 因而列出便於對照圖 7, 8, 9 及圖 10。圖 7 可看出例題一 Neumann 型邊界條件, 採用  $UT$  法, 的第一個虛擬頻率(虛部 Im 及實部 Re)發生在對應波數  $k=2.4081$  附近之數值不穩定區, 圖 8 可看出例題二 Dirichlet 型邊界條件, 採用  $UT$  法, 的第一個虛擬頻率(虛部 Im 及實部 Re)發生在對應波數  $k=2.4076$  附近之數值不穩區。由此已證明虛擬頻

率產生的位置與邊界條件無關，而與採用解的積分方程(UT法或LM法)有關。圖9可看出例題一 Neumann型邊界條件，採用LM法，虛擬頻率(虛部Im及實部Re)發生在對應波數 $k=3.8361$ 附近之數值不穩定區，圖10可看出例題二 Dirichlet型邊界條件，採用LM法，虛擬頻率(虛部Im及實部Re)發生數值不穩的區域，由此可再度證明此論點。

圖11為 Dirichlet邊界條件以UT法，取波數值在5.135到5.16範圍中，以不同的常元素數目(40, 50, 60及90)所得虛擬頻率產生的位置，解析預測值為5.1356，由該圖可發現若元素數目愈多則虛擬頻率的波數值愈接近解析解；反之則愈遠離解析解。虛擬頻率是非常敏感的，Dokumaci(1990)以常數元素，以不同的元素數目(100, 200, 400及800)找尋虛擬頻率，發現若元素數目愈少數值不穩定區較寬，反之則數值不穩定區較窄，此點和我們的結果吻合。在本文的數值實驗中發現虛擬頻率產生的位置，當採用較多的元素數目時會發生在較接近理論預測值處，但若所取的波數值增量不夠小(一般須小於0.00001)，則不易發現虛擬頻率的位置。

### 三. 結果與討論

由以上數值實驗結果得知，如經由對偶積分式理論中以不同的方法如直接法(第一式或第二式)或間接法(第一類或第二類)或不同的核函數來求解此類問題時，將伴隨著不同的虛擬頻率，經由數值實驗證明得知與一些學者所言：外域的 Dirichlet邊界條件產生的虛擬頻率會對應到內域 Neumann邊界條件的共振頻率，外域的 Neumann邊界條件產生的虛擬頻率會對應到內域 Dirichlet邊界條件的共振頻率，這是不正確的。應該是不論問題給定的邊界條件型式為何，直接法第一式得到的虛擬頻率皆相同，直接法第二式得到的虛擬頻率亦皆相同，由此可知虛擬頻率發生的位置與給定外域問題邊界條件無關。這是因為虛擬頻率於實際解析推導並無此問題，此因數值處理產生的虛擬頻率，其實等於在處理一不定型的0/0極限問題。此因未定係數僅含分子部份，無法反應出此存在的有限值，且因為要造成分母為零的頻率為無理數，於數值運算時，雖然不會有數值無效情形，但是於虛擬頻率附近其數值敏感性很大，因此容易造成偏離正解的誤差。

### 四. 結 論

在本文中以二維無窮域的 Helmholtz基本解為輔助系統，以數值實驗來釐清外域虛擬頻率的產生位置與欲解問題的邊界條件是無關的，而是由使用的數值方法中核函數的種類來決定，此點與陳(1998)的理論預測吻合。而且外域虛擬頻率產生的位置由數值實驗可知採用較多的元素數目會在更接近理論預測的虛擬頻率對應的波數處發生。

至於一維及三維外域 Helmholtz方程的虛擬頻率問題，其發生的機制與二維問題是一致的，我們已以解析結果來證明此結論(陳1998)，並已在其他會議論文發表(陳等，1998)。

本數值實驗中，在 Dirichlet邊界條件下由直接法的第二式(LM法)所得到的數值結果，及在 Neumann邊界條件下第一式(UT法)所得到的數值結果顯示，除了 $J_0(k)$ 外，其餘虛擬頻率對應的數值不穩定現象較不明顯，Dokumaci(1990)的文中亦僅顯現出 $J_{0,1}(2.4048)$ 及 $J_{0,2}(5.5201)$ 兩個部份。雖然我們已可由陳(1998)的理論證明中清楚的得知它的存在與對應的位置，這原因是否為正交性的關係還是值得繼續的予以探討。

### 謝誌

感謝國科會 NSC 88-2211-E-019-005 的經費贊助，另對國立台灣海洋大學力學聲響振動實驗室提供之軟硬體設備亦一併誌謝。

### 參考文獻

1. 陳正宗、洪宏基“邊界元素法”，第二版，新世界出版社，台北，臺灣(1992)。
2. 李洋傑，“層狀土壤與結構物之互制作用分析”，台灣大學土木工程研究所博士論文(1992)。
3. 洪宏基、劉德源“邊界元素法解析空間音場自然頻率之探討”，第二十期，國立台灣海洋大學理工學報，pp.27-42(1986)。
4. 陳義麟、陳正宗、梁明德、李洋傑“外域 Helmholtz方程虛擬頻率問題之探討”，第二十屆海洋工程研討會，國立台灣海洋大學，基隆(論文摘要已接受)(1998)。
5. Burton, A. J. and G. F. Miller “The Application of

Integral Equation Methods to Numerical Solution of Some Exterior Boundary Value Problem” *Proc. R. Soc. London Ser A*, Vol.323, pp. 201-210 (1971).

6.Chen, J. T.“On Fictitious Frequencies Using Dual Series Representation”, *Mechanics Research Communications*, Vol.25, No.5 (Accepted) (1998).

7.Chen, J. T. and H.-K. Hong, “Review of Dual Integral Representations with Emphasis on Hypersingular Integral and Divergent Series” *Applied Mechanics Review*, ASME. (Revised) (1998).

8.Chen, J. T. and K. H. Chen, “Dual Integral Formulation for Determining the Acoustic Modes of a Two-Dimensional Cavity with a Degenerate Boundary” *Engineering Analysis with Boundary Elements*. Vol.21, No.2, pp.105-116 (1998).

9.Cunefare, K. A. and G. Koopmann“A Boundary Element Method for Acoustic Radiation Valid for all Wavenumbers” *J. Acoust. Soc.*, Vol.85, No.1, pp. 39-48 (1989).

10.Dokumaci, E.“A Study of the Failure of Numerical Solutions in Boundary Element Analysis of Acoustic Radiation Problem” *Journal of Sound and Vibration*, Vol.139(1), pp. 83-97 (1990).

11.Givoli, D., I. Patlashenkoh, J. B. Keller“ High-order Boundary Conditions and Finite Elements for Infinites Domains” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.143, pp. 13-39 (1997).

12.Harari, I., P. E. Barbone, M. Slavutin, R. Shalom“Boundary Infinte Elements for the Helmholtz Equation in Exterior Domains” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol.41, pp.1105-1131 (1998).

13. Huang, I. T. and C. N. Fan“Combined Boundary Integral Equation and Null Field Equation Method for Hydrodynamic Effects of Two Dimensional Exterior Wave Problem” in *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineering*, Imech Publ. (1991).

14. Lee, C.-H. and P. D. Sclavounos “Removing the Irregular Frequencies from Integral Equations in Wave-body Interactions” *J. Fluid Mech.*, Vol.207, pp.393-418 (1989).

15. Malenica, S. and X. B. Chen“On the Irregular Frequencies Appearing in Wave Diffraction-Radiation Solutions” *International Journal of*

*Offshore and Polar Engineers*. Vol.8, No.2 ,pp. 110-114 (1998).

16. Martin, P. A.“On the Null-Field Equations for the Exterior Problems of Acoustic” *Q. J. Mech.*, Vol.27, pp. 386-396 (1980).

17. Rezayat, M. Shippy, D. J. and Rezayat, M. “On Time Harmonic Elastic-Wave Analysis by the Boundary Element Method” *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* , Vol.55, pp. 349-367 (1986).

18. Rizzo, F. J. Shippy, D. J. and Rezayat, M., “Boundary Integral Equation Analysis for a Class of Earth-Structure Interaction Problems” *Final Project Report for NSF Research Grant CEE-8013461* (1985).

19. Schenck, H. A.“Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problem” *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.44, pp. 41-58 (1968).

20. Seybert, A. F. and T. K. Rengarajan “The Use of CHIEF to Obtain Unique Solutions for Acoustic Radiation using Boundary Integral Equations” *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.81, No.5, pp. 1299-1306 (1989).

21.“SYSNOISE-User Manual”, *Numerical Integration Technology*, Leuven, Belgium (1989).

22. Shaw, R. P.“Boundary Integral Equation Methods Applied to Wave Problem” Chapter 6, in *Developments in Boundary Element Methods*, Vol.2, edited by P. K. Banerjee and R. P. Shaw, pp.121-153 (1979).

23.Wu, T. W. and A. F. Seybert“A Weighed Residual Formulation for the CHIEF Method in Acoustics” *J. Acoust. Soc. Am.*,Vol.90, No.3, pp.1608-1614.(1991).

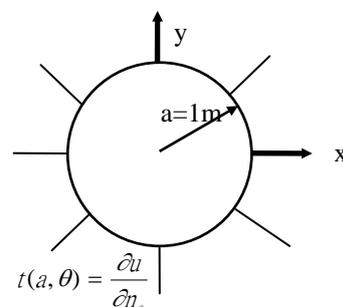
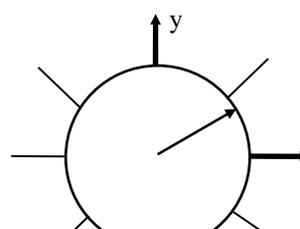


圖 1 Neumann 外域問題



$a=1\text{ m}$

$u(a,\theta) = \cos(4\theta)$

圖 2 Dirichlet 外域問題

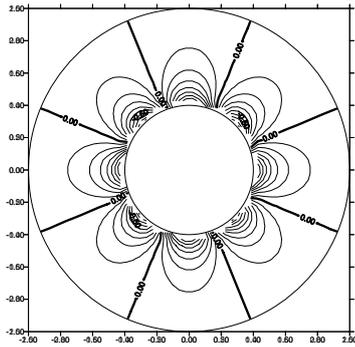


圖 3  $a=1.0\text{m}$ ,  $k=1$  解析解

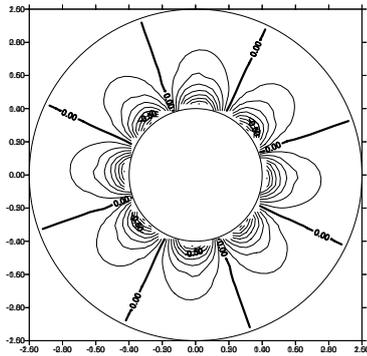


圖 4  $a=1.0\text{m}$ ,  $k=1$  數值解

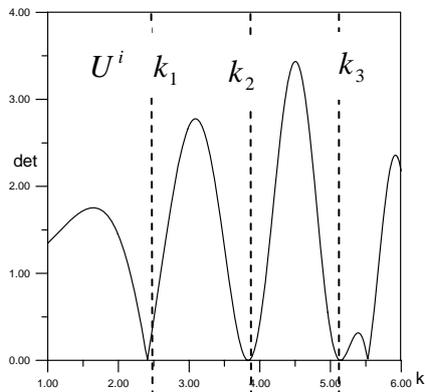


Fig 5a.

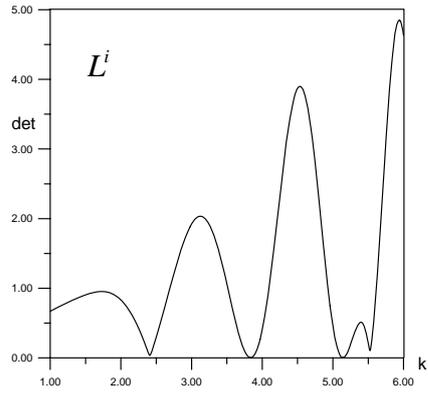


Fig 5b.

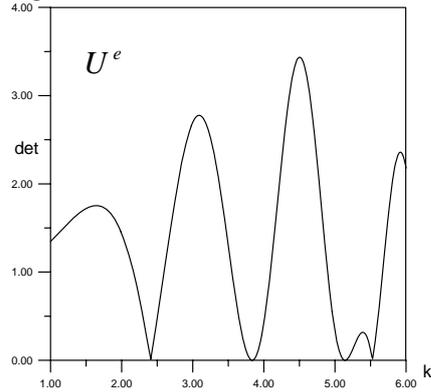


Fig 5c.

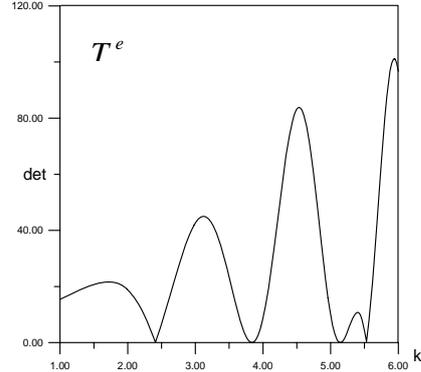


Fig 5d.

圖 5.  $[U^i], [L^i], [U^e], [T^e]$  的  
行列式絕對值對  $k$  圖

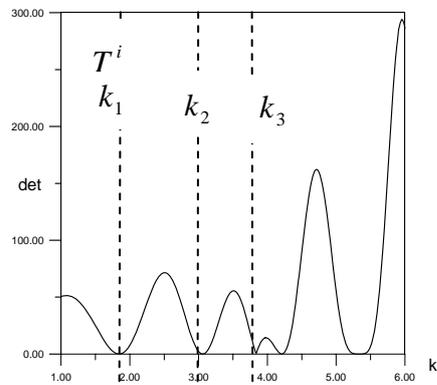


Fig 6a.

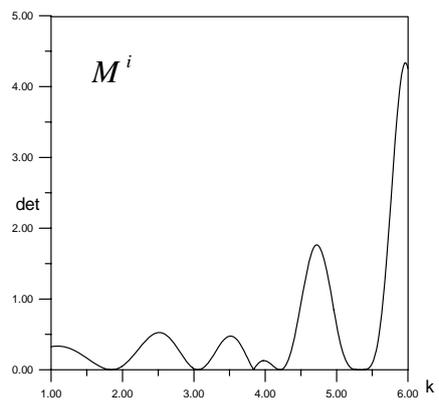


Fig 6b.

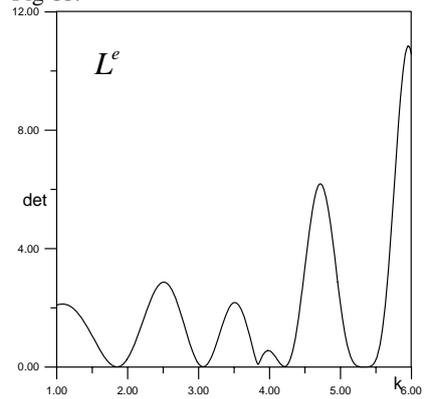


Fig 6c.

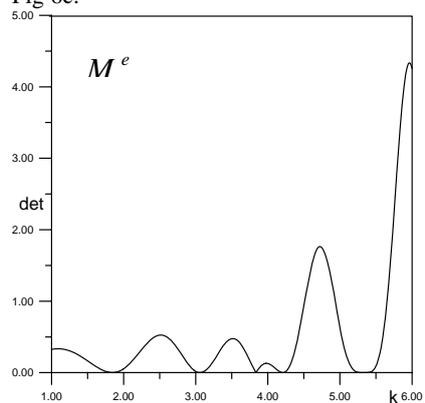


Fig 6d.

圖 6.  $[T^i], [M^i], [L^e], [M^e]$  的  
行列式絕對值對  $k$  圖

