

# 二維圓柱外域Helmholtz場虛擬頻率產生機制之探討

陳義麟

國立台灣海洋大學河海工程研究所博士班研究生  
國立高雄海洋技術學院造船工程科講師

中華民國力學學會  
87年度第22屆全國力學會議  
國立成功大學工學院航太館  
1998年12月19日

研究動機：

於積分方程解外域荷姆茲(Helmholtz)場問題時，會發生數值不穩定的虛擬頻率，此非自然現象，但為何會發生？何種情況下發生？虛擬頻率發生於何處？

## 文獻回顧

- Shaw, R. P. (1979)“Boundary Integral Equation Methods Applied to Wave Problem”, Vol. 2, pp.121-153.
- Martin, P. A.(1980)“On the Null-Field Equations for the Exterior Problems of Acoustic”,Q. J. Mech., Vol. 27, pp.386-396.
- Rizzo, F. J., Shippy, D. J. and Rezayat, M., (1985) “Boundary Integral Equation Analysis for a Class of Earth-Structure Interaction Problems”, NSF Research Grant CEE-8013461.

## 以往處理方式

- CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation)法，以域內點邊界積分方程式為輔助條件，補足不夠的束制條件。
- Burton & Miller (1971)及Lee & Sclavounos (1989)，提出合成奇異積分方程式與超奇異積分方程式的純虛數倍的方法。
- Malenica & Chen (1998)利用改變對應虛擬內域的邊界來確保所有頻率下解的唯一性。

# 研究方法

- 以對偶級數模式理論推導虛擬頻率所發生的位置。
- 採用直接法的對偶邊界元素法作數值實驗來驗證。

# 理論推導

線性化聲波方程式的控制方程式為

$$\nabla^2 u(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + Q(x,t), x \in D$$

其中  $u$  為速度勢位， $D$  為問題的定義域， $c$  為聲速， $Q(x,t)$  為聲源項。若無聲源項，則在頻率域的控制方程式可改寫成  $\nabla^2 \bar{u} + k^2 \bar{u} = 0$

其中  $\bar{u}$  為  $u$  的Fourier轉換， $k$  為波數。

基本解 $U(x,s)$ 滿足下式

$$\nabla^2 U(x,s) + k^2 U(x,s) = \delta(x-s)$$

$\delta$  為Dirac delta 函數

域內點對偶積分式直接法的第一式如下：

$$2\alpha u(x) = \int_B T(s,x)u(s)dB(s) - \int_B U(s,x)t(s)dB(s), x \in D$$

法向微分後，得直接法第二式

$$2\alpha t(x) = \int_B M(s,x)u(s)dB(s) - \int_B L(s,x)t(s)dB(s), x \in D$$

其中  $t(s) = \frac{\partial u(s)}{\partial n_s}$ ，而 $U, T, L, M$ 為四個核函數。

$$T(s, x) \equiv \frac{\partial U}{\partial s}$$

$$L(s, x) \equiv \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$M(s, x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial x}$$

以上核函數間滿足對偶積分架構的對偶關係如下：

$$U(s, x) = U(x, s)$$

$$T(s, x) = L(x, s)$$

$$M(s, x) = M(x, s)$$

若為二維時，對偶積分模式的四個核函數分別為

$$U(s, x) = \frac{-i\pi H_0^{(1)}(kr)}{2}$$

$$T(s, x) = \frac{-ik\pi}{2} H_1^{(1)}(kr) \frac{y_i n_i}{r}$$

$$L(s, x) = \frac{ik\pi}{2} H_1^{(1)}(kr) \frac{y_i \bar{n}_i}{r}$$

$$M(s, x) = \frac{-ik\pi}{2} \left\{ -k \frac{H_2^{(1)}(kr)}{r^2} y_i y_j n_i \bar{n}_j + \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r} n_i \bar{n}_i \right\}$$

其中， $H_n^{(1)}(kr)$  表示第一類  $n$  階Hankel函數， $r$  為場點與源點之間的距離， $n_i$  為源點的法向量之第  $i$  個分量，而

$y_i = s_i - x_i$ ， $\bar{n}_i$  為場點的法向量之第  $i$  個分量。

當  $x$  推到平滑邊界，則可得：

$$\alpha u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x) u(s) dB(s) \\ - R.P.V. \int_B U(s, x) t(s) dB(s), x \in B$$

$$\alpha t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x) u(s) dB(s) \\ - C.P.V. \int_B L(s, x) t(s) dB(s), x \in B$$

$R.P.V.$ ：黎曼主值(Riemann Principal Value)，

$C.P.V.$ ：柯西主值(Cauchy Principal Value)，

$H.P.V.$ ：阿達馬主值(Hadamard Principal Value)

$\alpha$  與體角有關，在平滑邊界時  $\alpha = \pi$ ，

## 虛擬頻率發生機制之理論證明：

選取  $J_m(kx)$  及  $Y_m(kx)$   $m \in \{0,1,2,3,\dots\}$ ，為兩個獨立基底函數，分別滿足

$$(\nabla^2 + k^2)J_m(kx) = 0, \quad x \in R^2,$$

$$(\nabla^2 + k^2)Y_m(kx) = 0, \quad x \in R^2,$$

定義 Wronskian 值， $W$ ，如下：

$$\begin{aligned} W(J_m(kx), Y_m(kx)) &= \{J_m(kx)\nabla Y_m(kx) \cdot n - Y_m(kx)\nabla J_m(kx) \cdot n\} \\ &= \begin{vmatrix} J_m(kx) & \nabla J_m(kx) \cdot n \\ Y_m(kx) & \nabla Y_m(kx) \cdot n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

根據 J 與 Y 兩個基底函數，可將 U, T, L 及 M 核函數以對偶級數模式表示如下

$$U(s, x) = \begin{cases} U^i(s, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} C_m(ks) J_m(kx), & x \in D^i \\ U^e(s, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} C_m(kx) J_m(ks), & x \in D^e \end{cases}$$

$$T(s, x) = \begin{cases} T^i(s, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} \{\nabla_s C_m(ks) \cdot n(s)\} J_m(kx), & x \in D^i \\ T^e(s, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} C_m(kx) \{\nabla_s J_m(ks) \cdot n(s)\}, & x \in D^e \end{cases}$$

$$L(s, x) = \begin{cases} L^i(s, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} C_m(ks) \{\nabla_x J_m(kx) \cdot n(x)\}, & x \in D^i \\ L^e(s, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} \{\nabla_x C_m(kx) \cdot n(x)\} J_m(ks), & x \in D^e \end{cases}$$

$$M(s, x) = \begin{cases} M^i(s, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} \{\nabla_s C_m(ks) \cdot n(s)\} \{\nabla_x J_m(kx) \cdot n(x)\}, & x \in D^i \\ M^e(s, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i}{c_m} \{\nabla_x C_m(kx) \cdot n(x)\} \{\nabla_s J_m(ks) \cdot n(s)\}, & x \in D^e \end{cases}$$

其中， $C_m(kx)$  為複數函數，

$$C_m(kx) = J_m(kx) + iY_m(kx) \quad ,$$

而  $J_m(k_n x)$  表示在特徵波數  $k_n$  時之特徵模態。

$Y_m(kx)$  則為  $C_m(kx)$  的虛部。

$C_m$  可由 Wronskian 值決定，

$D^i$  與  $D^e$  分別表示由邊界  $B$  所隔開的內域與外域領域。

對於外域問題用可分離核函數(degenerate kernel)代入直接法第一式與直接法第二式，可得到外域問題的 $UT$ 與 $LM$ 代數方程式如下：

$$\lim_{x \rightarrow x_B} \begin{bmatrix} C_m(kx_B)J_m(kx) & -kC'_m(kx_B)J_m(kx) \\ kC_m(kx_B)J'_m(kx) & -k^2C'_m(kx)J'_m(kx_B) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_m \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

其中， $x_B$  為推到邊界的邊界點， $u_m$  與  $t_m$  為  $u$  與  $t$  的廣義座標。第一式是由 $UT$ 法得到，第二式則由 $LM$ 法得到。

$$\begin{bmatrix} J_m(kx_B) & 0 \\ 0 & J'_m(kx_B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_m(kx_B) & -kC'_m(kx_B) \\ kC_m(kx_B) & -k^2C'_m(kx_B) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_m \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

第一個矩陣定義為前乘矩陣(premultiplying matrix) [  $S$  ] , 即

$$[S] = \begin{bmatrix} J_m(kx_B) & 0 \\ 0 & J'_m(kx_B) \end{bmatrix}$$

對輻射問題而言：不論任何邊界條件， $UT$  法及 $LM$  法在某些特定的波數(  $k_{UT}$  或  $k_{LM}$  )下，均會得到如下無效之等式：

當  $J_m(k_{UT}x_B) = 0$ ， $UT$ 式得到  $0 = 0$  之等式。

當  $J'_m(k_{LM}x_B) = 0$ ， $LM$ 式得到  $0 = 0$  之等式。

上述  $k_{UT}$  及  $k_{LM}$  分別代表 $UT$ 法及 $LM$ 法的虛擬頻率。

若將對偶邊界積分方程式第一式與第二式離散，則可得對偶邊界元素法的兩個代數方程式如下所示：

$$[T(k) - \pi I]\{u\} = [U(k)]\{t\}$$

$$[M(k)]\{u\} = [L(k) + \pi I]\{t\}$$

其中， $[U]$ ， $[T]$ ， $[L]$ 與 $[M]$ 為 $U$ ， $T$ ， $L$ 與 $M$ 核函數對應之影響係數矩陣。

數值實驗例題係取Harari等(1998)之例題予以比較，說明如下：

[例一]、圖1係半徑 $a=1$ 公尺二維圓柱之外域聲波輻射問題，邊界條件為Neumann型，即

$$t(a, \theta) = \frac{-kH_5^{(1)}(ka) + \frac{4}{r}H_4^{(1)}(ka)}{H_4^{(1)}(ka)}$$

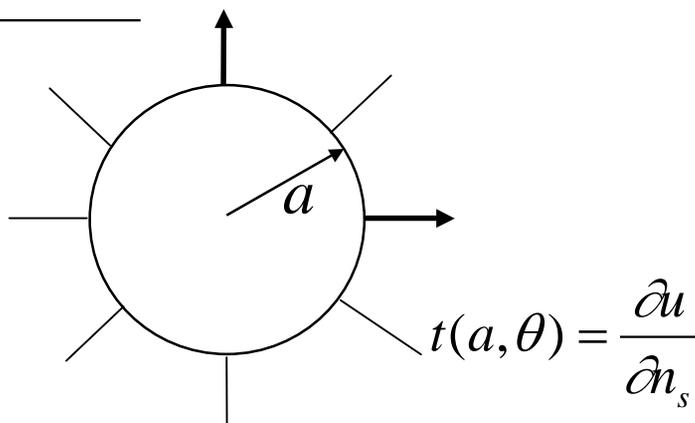
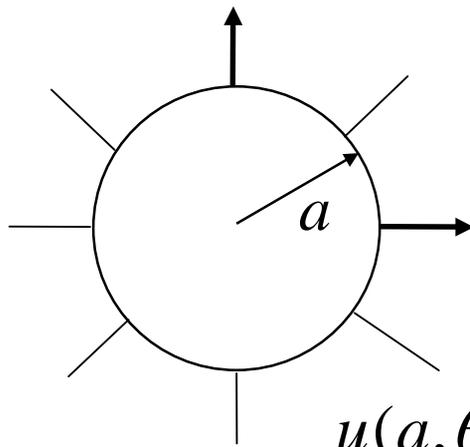


圖1 Neumann外域問題

[例二]、圖2係半徑 $a=1$ 公尺二維圓柱之外域聲波輻射的  
虛擬頻率問題，邊界條件為Dirichlet型，

即， $u(a, \theta) = \cos(4\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。



$$u(a, \theta) = \cos(4\theta)$$

圖2 Dirichlet外域問題

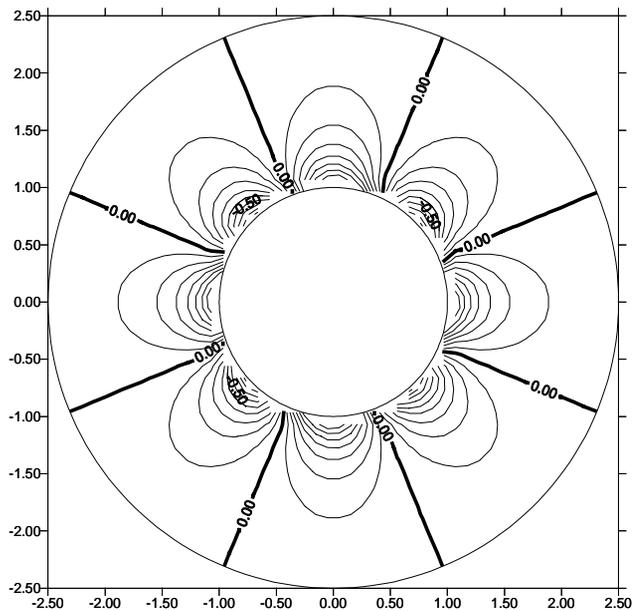


圖3. 解析解 $k=1.0$ ,  
Neumann B.C

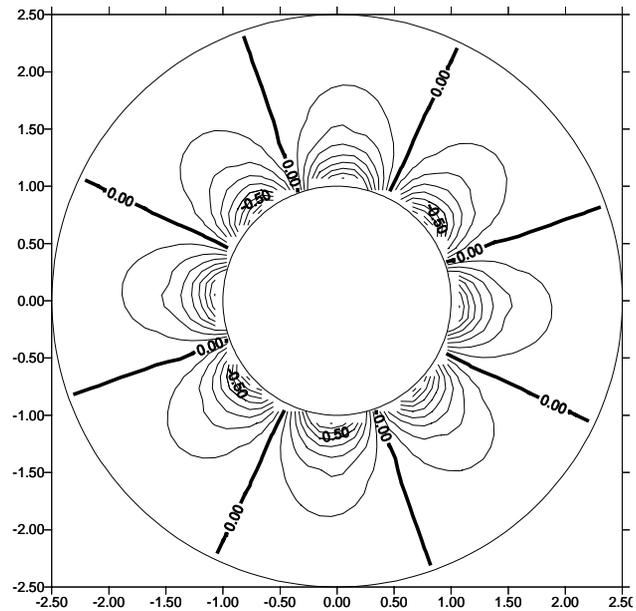


圖4. 數值解 $k=1.0$ ,  
Dirichlet B.C



# 結果與討論

- 由對偶積分式理論中以不同的方法如直接法(第一式、第二式)或不同的核函數來求解外域問題時，將伴隨著不同的虛擬頻率。
- 不論問題給定的邊界條件型式為何，直接法第一式得到的虛擬頻率皆相同，直接法第二式得到的虛擬頻率亦皆相同，可知此頻率與邊界條件無關。
- 一些學者所言：外域的Dirichlet邊界條件產生的虛擬頻率會對應到內域Neumann邊界條件的共振頻率，外域的Neumann邊界條件產生的虛擬頻率會對應到內域Dirichlet邊界條件的共振頻率，或類似的論點都是不正確的。