

外域 Helmholtz 方程虛擬頻率問題之探討

陳義麟¹ 陳正宗² 梁明德² 李洋傑³

摘要

本文主要目的係以理論探討虛擬頻率發生的機制，並採用對偶積分方程的直接法及間接法作解析證明，研究結果顯示虛擬頻率發生的位置與使用的數值方法及使用的核函數及奇異源分佈的位置有關，而與外域問題所給定的邊界條件型式無關，並以一維Helmholtz方程為範例證明此一結論。

A Study of Fictitious Frequency Problem in Exterior Helmholtz Equation

Chen, I. L.¹ J.T. Chen² M.T. Liang² Y. J. Lee³

Abstract

The principal objective of this paper is to understand the occurring mechanism of the fictitious frequencies by using analytical approach. Both the direct and indirect methods of the dual boundary integral equations are applied to demonstrate it. The present study indicates that the occurring positions of the fictitious frequencies depend on the numerical method, the kernel function and the distribution position of singularity. It is found that the fictitious eigenvalues are independent of the boundary conditions of the exterior problem. To verify this, a one-dimensional Helmholtz equation is used to demonstrate it.

一、前言

當一單自由度振動系統承受含自然頻率之外力激發時，會產生振動放大的現象，此種現象稱為共振，為自然發生的物理現象，在數學與物理上均可反應此事實。然而，於積分方程解外域聲場問題時，會發生解不唯一的虛擬頻率(fictitious frequency)，又可稱為寄生頻率(parasite frequency)或稱之為不規則頻率(irregular frequency)，此非自然現象，乃

3. 國立宜蘭技術學院土木工程科副教授

是因採取的數值方法過程中所衍生的問題，因為在純解析推導時並不產生此種問題。為了克服此種問題，Schenck (1968) 曾使用 CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation)法，以域內點邊界積分方程式為輔助條件，補足不足的束制條件。此法所選取的點若不巧為對應之內域問題模態的結點(node)時將會失效，亦即得到的是無效的方程式(trivial equation)，而該方法在愈高頻時失敗的可能性就愈高(Seybert & Rengarajan 1989)。後來Burton & Miller (1971)及 Lee & Sclavounos (1989)，亦曾提出合成奇異積分方程式與超奇異積分方程式的純虛數倍的方法，可在任意波數下均可得唯一解(Cun-efare & Gray 1989)，該方法可說是

1. 國立高雄海洋技術學院造船工程科講師

現為國立臺灣海洋大學河海工程研究所博士班研究生

2. 國立臺灣海洋大學河海工程學系副教授

將波數軸的極點移離實軸，以避免虛擬頻率的發生。此法雖有對偶積分的架構，但不同的是使用時係只用一個合成式，在含退化邊界問題的應用上，仍然有其盲點。而對偶邊界元素法使用兩式，可同時解決退化邊界與虛擬頻率的問題。若改以有限元素法分析外域聲場問題，雖無所謂的解不唯一的虛擬頻率問題，但為了滿足遠域輻射條件，需引入無限元素的觀念，DtN(Dirichlet to Neumann)法(Givoli et al.,1997)即為一例，Malenica & Chen(1998)利用改變對應虛擬內域的邊界來確保所有頻率下解的唯一性。因虛擬頻率係伴隨在我們所使用的積分方程中，故在陳與洪(1992)的書中稱虛擬頻率為寄生的數值共振頻率，而非實際的物理現象。此點更可由聲波、水波、彈性波、電磁波、浮體工程、置入物(inclusion)波場、聲波結構互制、流體結構互制、土壤結構互制(李，1992)與聲場全像術等領域的研究找到，且可看出問題的數學本質是一致的，即以數值觀點來看可視為 0/0 的數值不定型。雖然理論上可使用 L'Hospital 法則予以克服，但是數值執行上有其困難。

文獻上對於虛擬頻率所發生位置，Shaw(1979)曾提出：“外域的 Dirichlet 問題所產生的虛擬頻率會對應到內域 Neumann 問題的共振頻率，而外域的 Neumann 問題所產生的虛擬頻率會對應到內域 Dirichlet 問題的共振頻率”，Martin(1980)也曾提出：“一個外域的 Dirichlet 問題所產生的虛擬頻率會對應到內域的 Neumann 問題解的特徵頻率”，Rizzo 等(1985)，Rezayat 等(1986)及 Huang 與 Fan(1991)，都以為外域問題的邊界條件型式會影響虛擬頻率發生的位置，其中 Rizzo 等(1985)指出“Fictitious eigenvalues are equal to eigenvalues of interior domain with reverse boundary conditions.”，然而 Wu 與 Seybert(1991)卻提及“The exterior Dirichlet integral equation formulation breaks down or yields a nonunique solution at the eigenvalues of the corresponding interior Dirichlet problem”。在 SYSNOISE 的商業軟體亦曾提及此論點。以上論點均有矛盾之處，亦即影響虛擬頻率發生的因素，可能跟問題給定邊界條件的型式(Dirichlet 或 Neumann

型)、解表示式中核函數的型式(U, T, L 與 M)、積分方程的型式(Fredholm 型或 Volterra 型)、積分方程的類別(第一類或第二類)、對偶積分方程的第一式或第二式、BEM 的方法(直接法或間接法)、奇異源分佈的位置...等有關。Chen(1998)以對偶級數模式與核函數中兩個基底的 Wronskian 值解析探討外域聲場的虛擬頻率問題，並以對偶邊界元素的數值方法配合矩陣的行列式值、秩數、條件數予以釐清真正影響虛擬頻率發生位置的原因。本文將以一維為例，使用不同的數值方法及不同的核函數來說明影響虛擬頻率發生位置的可能原因。

二、理論推導

2.1 控制方程式及邊界積分方程式

(A)對偶積分架構(直接法)：

線性化聲波方程式的控制方程式為

$$\nabla^2 u(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + Q(x,t), x \in D \quad (1)$$

其中 u 為速度勢位， D 為問題的定義域， c 為聲速， $Q(x,t)$ 為聲源項。若無聲源項，則在頻率域的控制方程式(1)可改寫成

$$\nabla^2 \bar{u} + k^2 \bar{u} = 0 \quad (2)$$

其中 $\bar{u}$ 為 u 的 Fourier 轉換， k 為波數表為 $k = \omega / c$ ，其中 ω 為角頻率。

定義基本解 $U(x,s)$ 滿足下式

$$\nabla^2 U(x,s) + k^2 U(x,s) = \delta(x-s) \quad (3)$$

其中 δ 為 Dirac delta 函數。引入格林第三定理，可得到域內點(外域問題)對偶積分式的第一式如下：

$$2\alpha u(x) = \int_B T(s,x)u(s)dB(s) - \int_B U(s,x)t(s)dB(s), x \in D \quad (4)$$

其中， α 為一常數(和維度有關)。針對外域聲場的虛擬頻率問題與含退化邊界問題，均需將法向微分運算子作用到上式後，可得第二式

$$2\alpha t(x) = \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - \int_B L(s, x) t(s) dB(s), x \in D \quad (5)$$

其中， $t(s) = \frac{\partial u(s)}{\partial n_s}$ 且為速度勢位法向導微。

$$T(s, x) \equiv \frac{\partial U}{\partial s} \quad (6)$$

$$L(s, x) \equiv \frac{\partial U}{\partial x} \quad (7)$$

$$M(s, x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial x} \quad (8)$$

以上核函數間滿足對偶積分架構的對偶關係如下：

$$U(s, x) = U(x, s) \quad (9)$$

$$T(s, x) = L(x, s) \quad (10)$$

$$M(s, x) = M(x, s) \quad (11)$$

當 x 推到平滑邊界時，則可得邊界點的對偶積分方程如下：

$$\alpha u(x) = C.P.V. \int_B T(s, x) u(s) dB(s) - R.P.V. \int_B U(s, x) t(s) dB(s), x \in B \quad (12)$$

同理可得邊界積分第二式如下：

$$\alpha t(x) = H.P.V. \int_B M(s, x) u(s) dB(s) - C.P.V. \int_B L(s, x) t(s) dB(s), x \in B \quad (13)$$

其中 $R.P.V.$ 代表黎曼主值 (Riemann Principal Value)， $C.P.V.$ 代表柯西主值 (Cauchy Principal

Value)， $H.P.V.$ 代表阿達馬主值 (Hadamard Principal Value)，而 U, T, L, M 分別代表對偶積分模式的四個核函數。

(B). 間接法

第一類對偶邊界積分式(單層勢能法)

$$2\pi u(x) = \int_{B'} U(s, x) \phi(s) dB'(s) \quad (14)$$

$$2\pi t(x) = \int_{B'} L(s, x) \phi(s) dB'(s) \quad (15)$$

第二類對偶邊界積分式(雙層勢能法)

$$2\pi u(x) = \int_{B'} T(s, x) \varphi(s) dB(s) \quad (16)$$

$$2\pi t(x) = \int_{B'} M(s, x) \varphi(s) dB(s) \quad (17)$$

其中， B' 為退縮邊界。

2.2 虛擬頻率發生機制之解析

為簡單起見，本文考慮一維問題，此時 $\alpha = 1/2$ ，並針對不同的輔助系統予(取基本解)其核函數說明如下：

(1). 輔助系統為一維含自由端半無窮域的基本解，四個核函數可分別表為：

$$U(s, x) = \begin{cases} \frac{i}{k} e^{-ikx} \cos(ks), 0 < s < x \\ \frac{i}{k} e^{-iks} \cos(kx), s > x \end{cases} \quad (18)$$

$$T(s, x) = \begin{cases} -ie^{-ikx} \sin(ks), 0 < s < x \\ e^{-iks} \cos(kx), s > x \end{cases} \quad (19)$$

$$L(s, x) = \begin{cases} e^{-ikx} \cos(ks), 0 < s < x \\ -ie^{-iks} \sin(kx), s > x \end{cases} \quad (20)$$

$$M(s, x) = \begin{cases} -ke^{-ikx} \sin(ks), 0 < s < x \\ -ke^{-iks} \sin(kx), s > x \end{cases} \quad (21)$$

(2). 輔助系統為一維含固定端半無窮域的基本解，其

四個核函數可分別表示如下：

$$U(s, x) = \begin{cases} -\frac{1}{k} e^{-ikx} \sin(ks), 0 < s < x \\ -\frac{1}{k} e^{-iks} \sin(kx), s > x \end{cases} \quad (22)$$

$$T(s, x) = \begin{cases} -e^{-ikx} \cos(ks), 0 < s < x \\ ie^{-iks} \sin(kx), s > x \end{cases} \quad (23)$$

$$L(s, x) = \begin{cases} ie^{-ikx} \sin(ks), 0 < s < x \\ -e^{-iks} \cos(kx), s > x \end{cases} \quad (24)$$

$$M(s, x) = \begin{cases} ike^{-ikx} \cos(ks), 0 < s < x \\ ike^{-iks} \cos(kx), s > x \end{cases} \quad (25)$$

(3). 一維無窮域基本解的四個核函數如下

$$U(s, x) = \frac{e^{ikr}}{2k} \quad (26)$$

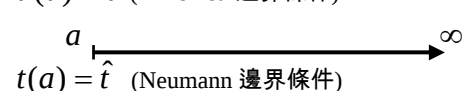
$$T(s, x) = \frac{-ie^{ikr}}{2} \quad (27)$$

$$L(s, x) = \frac{ie^{ikr}}{2} \quad (28)$$

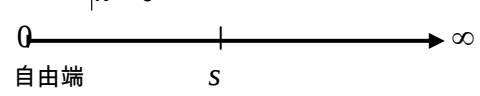
$$M(s, x) = \frac{ke^{ikr}}{2} \quad (29)$$

其中 $r = |x - s|$ 。

[解析例一]、考慮如圖(1)之欲解系統，輔以如圖(2)之半無窮域自由端的輔助系統，以直接法並分別考慮(a).Dirichlet 及(b).Neumann 邊界條件的外域問題，求虛擬頻率發生的位置。

$$\begin{aligned} u(a) &= \hat{u} \text{ (Dirichlet 邊界條件)} \\ t(a) &= \hat{t} \text{ (Neumann 邊界條件)} \end{aligned}$$


圖(1) 欲解系統 $u(x)$

$$\left. T(x, s) \right|_{x=0} = 0$$


圖(2) 輔助系統 $U(x, s)$

控制方程式及邊界條件：

$$\nabla^2 u(x) + k^2 u(x) = 0, a < x < \infty$$

Dirichlet 邊界條件： $u(a) = \hat{u}$

Neumann 邊界條件： $t(a) = \hat{t}$

基本解 $U(s, x)$ 滿足下式

$$\nabla^2 U(s, x) + k^2 U(s, x) = \delta(x - s)$$

(1). 對欲解系統及輔助系統取功能互換，可得

$$u(s) = \int_B \{T(x, s)u(x) - U(x, s)\} dB(x)$$

$$u(s) = T(x, s)u(x) \Big|_a^\infty - U(x, s)t(x) \Big|_a^\infty$$

$$u(s) = T(\infty, s)u(\infty) - T(a, s)u(a) - U(\infty, s)t(\infty) + U(a, s)t(a)$$

$$u(s) = \begin{bmatrix} -T(a, s) & T(\infty, s) & U(a, s) & -U(\infty, s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(a) \\ u(\infty) \\ t(a) \\ t(\infty) \end{Bmatrix}$$

當 $s \rightarrow a^+$

$$0 = \begin{bmatrix} -T(a, a) - 1 & T(\infty, a) & U(a, a) & -U(\infty, a) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(a) \\ u(\infty) \\ t(a) \\ t(\infty) \end{Bmatrix}$$

當 $s \rightarrow \infty^-$

$$0 = \begin{bmatrix} -T(a, \infty) & T(\infty, \infty) - 1 & U(a, \infty) & -U(\infty, \infty) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(a) \\ u(\infty) \\ t(a) \\ t(\infty) \end{Bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} ie^{-ika} \sin(ka) - 1 & 0 & \frac{i}{k} e^{-ika} \cos(ka) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(a) \\ u(\infty) \\ t(a) \\ t(\infty) \end{Bmatrix}$$

$$0 = (ie^{-ika} \sin(ka) - 1)u(a) + \frac{i}{k} e^{-ika} \cos(ka)t(a) \quad (30)$$

(a).代入 Dirichlet 邊界條件 $u(a) = \hat{u}$ ，為求邊界之 t 值(30)式中 $\cos(ka)$ 移至分母，可得

$$t(a) = \frac{p}{\cos(ka)}, \quad p \text{ 為一常數，}$$

產生虛擬頻率的位置為

$$\cos(ka) = 0 \quad (31)$$

$$\text{即 } k = \frac{(2n+1)\pi}{2a}, \quad n=0,1,2,3,\dots$$

(b)代入 Neumann 邊界條件 $t(a) = \hat{t}$ ，同理所產生虛擬頻率的位置為

$$ie^{-ika} \sin(ka) - 1 = 0$$

$$\text{將 } e^{-ika} = \cos(ka) - i \sin(ka)$$

$$1 = \cos^2(ka) + \sin^2(ka) \quad \text{代入亦可得}$$

$$\cos(ka) = 0 \quad (32)$$

$$\text{即 } k = \frac{(2n+1)\pi}{2a}, \quad n=0,1,2,3,\dots$$

由式(31)及(32)表明不論外域問題的邊界條件型式為何，虛擬頻率發生的位置皆相同，顯然在輔助系統選定後，與欲解系統的邊界條件型式無關。

(2).將直接法第一式作法向微分後即得直接法對偶積分方程第二式，再對 x 作線積分再將 $s \rightarrow a^+$ 及 $s \rightarrow \infty^-$ 後，代入邊界條件可得

(a).Dirichlet 邊界條件 $u(a) = \hat{u}$ 虛擬頻率發生位置

$$\sin(ka) = 0 \quad (33)$$

$$\text{即 } k = \frac{n\pi}{a}, \quad n=0,1,2,3,\dots$$

(b).Neumann 邊界條件 $t(a) = \hat{t}$ 虛擬頻率發生的位置

$$\sin(ka) = 0 \quad (34)$$

$$\text{亦即 } k = \frac{n\pi}{a}, \quad n=0,1,2,3,\dots$$

由式(33)及(34)再次表明不論邊界條件為何，虛擬頻率發生的位置皆相同。

[解析例二]、考慮如圖(1)之欲解系統，輔以如圖(2)之半無窮域自由端的輔助系統，以間接法並分別考慮(a).Dirichlet 及(b).Neumann 邊界條件求虛擬頻率發生的位置。

(1).間接法第一類(U, L)，輔助系統為半無窮域自由端的間接法積分方程

$$2\pi u(s) = \int_{B'} U(x, s) \phi(x) dB'(x)$$

$$2\pi t(s) = \int_{B'} L(x, s) \phi(x) dB'(x)$$

$$2\pi u(s) = U(x, s) \phi(x) \Big|_a^\infty$$

$$2\pi t(s) = L(x, s) \phi(x) \Big|_a^\infty$$

$$2\pi u(s) = U(\infty, s) \phi(\infty) - U(a, s) \phi(a)$$

$$2\pi t(s) = L(\infty, s) \phi(\infty) - L(a, s) \phi(a)$$

$$s \rightarrow a^+$$

$$2\pi u(a) = U(\infty, a) \phi(\infty) - U(a, a) \phi(a)$$

$$2\pi t(a) = L(\infty, a)\phi(\infty) - L(a, a)\phi(a)$$

$s \rightarrow \infty^-$

$$\begin{aligned} 2\pi u(\infty) &= U(\infty, \infty)\phi(\infty) - U(a, \infty)\phi(a) \\ 2\pi t(\infty) &= L(\infty, \infty)\phi(\infty) - L(a, \infty)\phi(a) \end{aligned}$$

(a).代入 Dirichlet 邊界條件得

$$2\pi \hat{u} = -\frac{i}{k} e^{-ika} \cos(ka)\phi(a) \quad (35)$$

因為若欲求得 $\phi(a)$ 則式(35)成為

$$\phi(a) = \frac{q}{\cos(ka)}, \quad q \text{ 為一常數,}$$

所以產生虛擬頻率的位置為

$$\cos(ka) = 0 \quad (36)$$

$$\text{即 } k = \frac{(2n+1)\pi}{2a}, \quad n=0,1,2,3\dots$$

(b).代入 Neumann 邊界條件得

$$2\pi \hat{t} = e^{-ika} \cos(ka)\phi(a)$$

所產生虛擬頻率的位置為

$$\cos(ka) = 0 \quad (37)$$

$$\text{即 } k = \frac{(2n+1)\pi}{2a}, \quad n=0,1,2,3\dots$$

(2).同理第二類(T, M), 輔助系統為半無窮域自由端的間接法積分方程求得之虛擬頻率:

(a).Dirichlet 邊界條件 $u(a) = \hat{u}$ 虛擬頻率的位置為

$$\sin(ka) = 0 \quad (38)$$

$$\text{即 } k = \frac{n\pi}{a}, \quad n=0,1,2,3\dots$$

(b).Neumann 邊界條件 $t(a) = \hat{t}$ 虛擬頻率發生的位

置

$$\sin(ka) = 0 \quad (39)$$

$$\text{亦即 } k = \frac{n\pi}{a}, \quad n=0,1,2,3\dots$$

由式(36), (37)及式(38), (39)亦再度表明虛擬頻率發生的位置與邊界條件型式無關。

以半無窮域自由端為輔助系統, 用直接法及間接法解析的虛擬頻率將上述結果, 並為方便比較, 亦將內域問題共振頻率列於表 1。同理以半無窮域固定端為輔助系統, 用直接法及間接法解析的虛擬頻率則列於表 2。

三、結果與討論

由本文解析探討證明得知, 如經由對偶積分式理論中以不同的方法如直接法(第一式、第二式)或間接法(第一類、第二類)或不同的核函數來求解此類問題時, 將伴隨著不同的虛擬頻率, 經由證明得知與一些學者所言: 外域的 Dirichlet 邊界條件產生的虛擬頻率會對應到內域 Neumann 邊界條件的共振頻率, 外域的 Neumann 邊界條件產生的虛擬頻率會對應到內域 Dirichlet 邊界條件的共振頻率, 這是不正確的。應該是不論問題給定的邊界條件型式為何, 直接法第一式得到的虛擬頻率皆相同, 直接法第二式得到的虛擬頻率亦皆相同, 可知此頻率與邊界條件無關。這是因為虛擬頻率於實際解析推導並無此問題, 此因數值處理產生的虛擬頻率, 其實等於在處理一不定型的極限 0/0 問題。此因未定係數僅含分子部份, 無法反應出此存在的有限值, 且因為要造成分母為零的頻率為無理數, 於數值運算時, 雖然不會有數值無效情形, 但是於虛擬頻率附近其數值敏感性很大, 因此易造成偏離正解的誤差。

四、結論

在本文中我們以一維含自由端及固定端半無窮域的基本解為輔助系統, 再以直接法及間接法來證明我們的論點, 我們釐清了虛擬頻率的產生位置與欲解問題的邊界條件是無關的, 而是與使用的數值

方法、核函數的種類及奇異源所分佈的位置有關。

至於二維及三維 Helmholtz 方程的虛擬頻率問題，其發生的機制與一維問題是一致的，我們已用數值計算結果來證明此結論，並將在其他期刊發表。

謝誌

本文第二作者感謝行政院國家科學委員會專題研究計畫 NSC 88-2211-E-019-005 的經費贊助與支持，並對台灣大學土木系洪宏基教授與黃燦輝教授的寶貴意見予以致謝。

參考文獻

- 1.陳正宗、洪宏基(1992)“邊界元素法”，第二版，新世界出版社，台北，臺灣。
- 2.李洋傑，(1992)“層狀土壤與結構物之互制作用分析”，台灣大學土木工程研究所博士論文。
- 3.Burton, A. J. and G. F. Miller (1971) “The Application of Integral Equation Methods to Numerical Solution of Some Exterior Boundary Value Problem” , *Proc. R. Soc. London Ser A*, Vol.323,pp. 201-210.
- 4.Chen, J. T.(1998)“On Fictitious Frequencies Using Dual Series Representation”, will appear in *Mechanics Research Communications*, Vol. 25, No.5.
- 5.Cunefare, K. A. and G. Koopmann(1989)“A boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers”, *J. Acoust. Soc.*, Vol. 85, No. 1, pp. 39-48.
- 6.Givoli Dan, I. Patlashenkoh, J. B. Keller(1997) “High-order boundary conditions and finite elements for infinited domains”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 143, pp. 13-39.
- 7.Huang, I. T. and C. N. Fan(1991)“Combined Boundary Integral Equation and Null Field Equation Method for Hydrodynamic Effects of Two Dimensional Exterior Wave Problem”, in *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineering, Imech Publ.*
- 8.Lee, C.-H. and P. D. Sclavounos (1989) “Removing the irregular frequencies from integral equations in wave-body interactions”, *J. Fluid Mech.*, Vol. 207, pp. 393-418.
- 9.Malenica, S. and X. B. Chen(1998)“On the Irregular Frequencies Appearing in Wave Diffraction-Radiation Solutions”, *International Journal of Offshore and Polar Engineers*. Vol. 8, No. 2 ,pp. 110-114
- 10.Martin, P. A.(1980)“On the Null-Field Equations for the Exterior Problems of Acoustic”, *Q. J. Mech.*, Vol. 27, pp. 386-396.
- 11.Rezayat, M. et al. (1986)“On Time Harmonic Elastic-Wave Analysis by the Boundary Element Method”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* , Vol. 55, pp. 349-367.
- 12.Rizzo, F. J. et al. (1985)“Boundary Integral Equation Analysis for a Class of Earth-Structure Interaction Problems”, *Final Project Report for NSF Research Grant CEE-8013461*.
- 13.Schenck, H. A.(1968)“Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problem”, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 44, pp. 41-58.
- 14.Seybert, A. F. and T. K. Rengarajan““The use of CHIEF to obtain unique solutions for acoustic radiation using boundary integral equations”, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 81, No. 5, pp. 1299-1306.
- 15.Shaw, R. P. (1979)“Boundary Integral Equation Methods Applied to Wave Problem”, Chapter 6, in *Developments in Boundary Element Methods*, Vol. 2, edited by P. K. Banerjee and R. P. Shaw, pp.121-153.
- 16.Wu, T. W. and A. F. Seybert(1991)“A weighed residual formulation for the CHIEF method in acoustics”, *J. Acoust. Soc. Am.*,Vol. 90, No. 3, pp.1608-1614.

