外域Helmholtz方程虛擬頻率問題之探討

陳義麟[1]　陳正宗[2]　梁明德[2]　李洋傑[3]

1.國立高雄海洋技術學院造船工程科講師
現為國立臺灣海洋大學河海工程研究所博士班研究生
2.國立臺灣海洋大學河海工程學系副教授
3.國立宜蘭技術學院土木工程科副教授

第二十屆海洋工程研討會
長榮桂冠酒店　基隆　臺灣

1998年11月20日

研究動機：

- 於積分方程解外域荷姆茲(Helmholtz)場問題時，會發生數值不穩定的虛擬頻率，此非自然現象，但為何會發生？ 何種情況下發生？ 虛擬頻率發生於何處？

文獻回顧

- Shaw, R. P. (1979)“Boundary Integral Equation Methods Applied to Wave Problem”, Vol. 2, pp.121-153.
- Martin, P. A.(1980)“On the Null-Field Equations for the Exterior Problems of Acoustic”,Q. J. Mech., Vol. 27, pp.386-396.
- Rizzo, F. J., Shippy, D. J. and Rezayat, M., (1985) “Boundary Integral Equation Analysis for a Class of Earth-Structure Interaction Problems”, NSF Research Grant CEE-8013461.

以往處理方式

- CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation)法，以域內點邊界積分方程式為輔助條件，補足不夠的束制條件。
- Burton ＆ Miller (1971)及Lee ＆ Sclavounos (1989), 提出合成奇異積分方程式與超奇異積分方程式的純虛數倍的方法。
- Malenica ＆ Chen (1998)利用改變對應虛擬內域的邊界來確保所有頻率下解的唯一性。

研究方法

- 對偶積分方程直接法解析證明。
- 對偶積分方程間接法解析證明。

理 論 推 導

線性化聲波方程式的控制方程式為

$$\nabla^2 u(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + Q(x,t), x \in D$$

其中 u 為速度勢位，D 為問題的定義域，c 為聲速，$Q(x,t)$ 為聲源項。若無聲源項，則在頻率域的控制方程式可改寫成 $\nabla^2 \overline{u} + k^2 \overline{u} = 0$

其中 $\overline{u}$ 為 u 的Fourier轉換，k 為波數。

基本解$U(x,s)$滿足下式

$$\nabla^2 U(x,s) + k^2 U(x,s) = \delta(x-s)$$

δ 為Dirac delta 函數

域內點對偶積分式直接法的第一式如下：

$$2\alpha\, u(x) = \int_B T(s,x)\, u(s)\, dB(s) - \int_B U(s,x)\, t(s)\, dB(s), x \in D$$

法向微分後，得直接法第二式

$$2\alpha\, t(x) = \int_B M(s,x)\, u(s)\, dB(s) - \int_B L(s,x)\, t(s)\, dB(s), x \in D$$

其中 $t(s) = \dfrac{\partial u(s)}{\partial n_s}$，而$U$，$T$，$L$，$M$為四個核函數。

$$T(s,x) \equiv \frac{\partial U}{\partial s}$$

$$L(s,x) \equiv \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$M(s,x) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial x}$$

以上核函數間滿足對偶積分架構的對偶關係如下：

$$U(s,x) = U(x,s)$$

$$T(s,x) = L(x,s)$$

$$M(s,x) = M(x,s)$$

當 x 推到平滑邊界，則可得：

$$\alpha u(x) = C.P.V.\int_B T(s,x)u(s)\,dB(s) - R.P.V.\int_B U(s,x)t(s)\,dB(s), x \in B$$

$$\alpha t(x) = H.P.V.\int_B M(s,x)u(s)\,dB(s) - C.P.V.\int_B L(s,x)t(s)\,dB(s), x \in B$$

R.P.V.：黎曼主值(Riemann Principal Value),

C.P.V. ：柯西主值(Cauchy Principal Value),

H.P.V. ：阿達馬主值(Hadamard Principal Value)

間接法

第一類對偶邊界積分式(單層勢能法)

$$2\pi\, u(x) = \int_{B'} U(s,x)\phi(s)\,dB'(s)$$

$$2\pi\, t(x) = \int_{B'} L(s,x)\phi(s)\,dB'(s)$$

第二類對偶邊界積分式(雙層勢能法)

$$2\pi u(x) = \int_{B'} T(s,x)\varphi(s)\,dB'(s)$$

$$2\pi t(x) = \int_{B'} M(s,x)\varphi(s)\,dB'(s)$$

其中， B' 為退縮邊界。

(1).輔助系統選一維含自由端半無窮域的基本解,
四個核函數可分別表為：

$U(s,x)=\begin{cases}\dfrac{i}{k}e^{-ikx}\cos(ks), 0<s<x\\ \dfrac{i}{k}e^{-iks}\cos(kx), s>x\end{cases}$	$L(s,x)=\begin{cases}e^{-ikx}\cos(ks), 0<s<x\\ -ie^{-iks}\sin(kx), s>x\end{cases}$
$T(s,x)=\begin{cases}-ie^{-ikx}\sin(ks), 0<s<x\\ e^{-iks}\cos(kx), s>x\end{cases}$	$M(s,x)=\begin{cases}-ke^{-ikx}\sin(ks), 0<s<x\\ -ke^{-iks}\sin(kx), s>x\end{cases}$

(2).輔助系統為一維含固定端半無窮域的基本解，其四個核函數可分別表示如下：

$U(s,x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{k}e^{-ikx}\sin(ks), 0<s<x\\ \dfrac{-1}{k}e^{-iks}\sin(kx),\ s>x\end{cases}$	$L(s,x)=\begin{cases}ie^{-ikx}\sin(ks), 0<s<x\\ -e^{-iks}\cos(kx), s>x\end{cases}$
$T(s,x)=\begin{cases}-e^{-ikx}\cos(ks), 0<s<x\\ ie^{-iks}\sin(kx), s>x\end{cases}$	$M(s,x)=\begin{cases}ike^{-ikx}\cos(ks), 0<s<x\\ ike^{-iks}\cos(kx), s>x\end{cases}$

(3).一維無窮域基本解的四個核函數

如下

$$U(s,x)=\frac{e^{ikr}}{2k}$$

$$T(s,x)=\frac{-ie^{ikr}}{2}$$

$$L(s,x)=\frac{ie^{ikr}}{2}$$

$$M(s,x)=\frac{ke^{ikr}}{2}$$

[解析例一]、考慮如圖(1)之欲解系統，輔以如圖(2)之半無窮域自由端的輔助系統，以<u>直接法</u>並分別考慮(a).Dirichlet及(b).Neumann邊界條件的外域問題，求虛擬頻率發生位置。

a $\quad u(a)=\hat{u}$ (Dirichlet B.C.) $\quad \infty$

$t(a)=\hat{t}$ (Neumann B.C.)

圖(1) 欲解系統*u(x)*

$T(x,s)\Big|_{x=0}=0$

自由端 $\quad s$

圖(2)輔助系統*U(x,s)*

控制方程式及邊界條件：

$$\nabla^2 u(x) + k^2 u(x) = 0, a < x < \infty$$

Dirichlet 邊界條件： $u(a) = \hat{u}$

Neumann 邊界條件： $t(a) = \hat{t}$

(1). 直接法第一式，對欲解系統及輔助系統取功能互換可得

$$(ie^{-ika}\sin(ka) - 1)u(a) + \frac{i}{k}e^{-ika}\cos(ka)t(a) = 0 \qquad (1)$$

(a).代入Dirichlet邊界條件 $u(a)=\hat{u}$,

可得 $t(a)=\dfrac{p}{\cos(ka)}$ ，p 為一常數，產生虛擬頻率

的位置為 $\cos(ka)=0$ (2)

即 $k=\dfrac{(2n+1)\pi}{2a}$, *n=0,1,2,3….*

(b)代入Neumann邊界條件 $t(a)=\hat{t}$ 亦可得知產生虛擬頻率的位置 為 $\cos(ka)=0$ (3)

即 $k=\frac{(2n+1)\pi}{2a}$ ， $n=0,1,2,3\ldots.$

由(2)，(3)得知不論外域問題的邊界條件型式為何，虛擬頻率發生的位置皆相同，顯然在輔助系統選定後，該頻率與欲解系統的邊界條件型式無關。

(2). 直接法第二式，對欲解系統及輔助系統取功能互換可得

$$-ke^{-ika}\sin(ka)u(a)+(e^{-ika}\cos(ka)-1)t(a)=0$$

(a).代入Dirichlet邊界條件 $u(a)=\hat{u}$ 於上式

得 $\sin(ka)(\sin(ka)+i\cos(ka))t(a)=q$, q 為一常數

欲求得 $t(a)$，可得知產生虛擬頻率的位置

為 $\sin(ka)=0$ (4)

即 $k=\dfrac{n\pi}{a}$ n=0,1,2,3...

(b)代入Neumann邊界條件 $t(a)=\hat{t}$ 亦可得知產生虛擬頻率的位置 為 $\sin(ka)=0$ (5)

即 $k=\dfrac{n\pi}{a}$ ， n=0,1,2,3…

由(4)，(5)得知不論外域問題的邊界條件型式為何,虛擬率發生的位置皆相同。

[解析例二]、考慮如例(一)之欲解系統及輔助系統，以間接法並分別考慮(a).Dirichlet及(b).Neumann邊界條件求虛擬頻率發生的位置。

(1).間接法第一類(U，L),

(a).代入Dirichlet邊界條件 $u(a)=\hat{u}$，可得

$$2\pi\hat{u}=-\frac{i}{k}e^{-ika}\cos(ka)\phi(a)$$

欲求 $\phi(a)$，可得 $\phi(a)=\dfrac{q}{\cos(ka)}$ ，q為一常數,

所以產生虛擬頻率的位置為 $\cos(ka)=0$

即 $k=\dfrac{(2n+1)\pi}{2a}$，$n=0,1,2,3\ldots$

(b)代入Neumann邊界條件得

$$2\pi\hat{t} = e^{-ika}\cos(ka)\phi(a)$$

同理產生虛擬頻率的位置為

$$\cos(ka) = 0$$

即 $k = \dfrac{(2n+1)\pi}{2a}$ ， *n=0,1,2,3…*

(2).同理間接法第二類(T，M)，輔助系統為半無窮域自由端的間接法積分方程求得之虛擬頻率：

(a).Dirichlet邊界條件虛擬頻率的位置為 $\sin(ka) = 0$

即 $k = \dfrac{n\pi}{a}$ ，*n=0,1,2,3….*

(b).Neumann邊界條件虛擬頻率發生的位置為 $\sin(ka) = 0$

即 $k = \dfrac{n\pi}{a}$ ，*n=0,1,2,3….*

由此例亦再度表明虛擬頻率發生的位置與邊界條件型式無關。

結果與討論

- 由對偶積分式理論中以不同的方法如直接法(第一式、第二式)或間接法(第一類、第二類)或不同的核函數來求解外域問題時，將伴隨著不同的虛擬頻率。
- 不論問題給定的邊界條件型式為何，直接法第一式或間接法第一類得到的虛擬頻率皆相同，直接法第二式或間接法第二類得到的虛擬頻率亦皆相同，可知此頻率與邊界條件無關。
- 一些學者所言：外域的Dirichlet邊界條件產生的虛擬頻率會對應到內域Neumann邊界條件的共振頻率，外域的Neumann邊界條件產生的虛擬頻率會對應到內域Dirichlet邊界條件的共振頻率，或類似的論點都是不正確的。