題目:含孔洞二維 Helmholtz 方程特徵值問題假根探討

一、需要指導教授指導內容:

1. 邊界元素法理論基礎
2. 多倒易法程式建立
3. 特徵值問題之求解
4. 奇異值分解法理論
5. 真假根理論預測
6. 例題測試

二、研究動機、方法及步驟:

(1) 研究動機:

以往求解 Helmholtz 方程的特徵問題時，多半以複數基本解處理，傳統上邊界元素法為避免在複數域下求解，可將 Helmholtz 方程式中含特徵值項視為 Laplace 方程式之外力源，但是此外力源會導得一內域積分項，因而使得在利用邊界元素法求解時，仍需對內域作離散。如此, 將失去邊界元素法優點。本計劃將結合多倒易

法與對偶邊界元素法，建立二維特徵值問題的理論推導，並進行解析推導與數值計算，以及求解二維空間含孔洞問題之自然頻率與自然模態。

(2) 研究方法：

對於傳統多倒易法之增根現象，除了利用多倒易法中超奇異方程過濾外，我們也可以把實數型對偶多倒易法中的奇異方程和超奇異方程結合後再使用奇異值分解法，能更有效地將增根測出來並濾除之，最後將以解析方式加以說明增根的現象，進而建構一套適用於求解任意二維聲場之聲頻聲模的程式。

(3) 研究步驟：

(a)考慮二維特徵值問題，其控制方程式為：

根據對偶多倒易法，奇異方程式和超奇異方程式

$$(\nabla^2 + k^2)u(x_1, x_2) = 0, \qquad (x_1, x_2) \in D \qquad ---(1)$$

分別如下：

$$\pi u(x) = \text{C.P.V}\int_B T(s,x)u(s)dB(s) - \text{R.P.V}\int_B U(s,x)t(s)dB(s), x \in B$$
$$\pi t(x) = \text{H.P.V}\int_B M(s,x)u(s)dB(s) - \text{C.P.V}\int_B L(s,x)t(s)dB(s), x \in B$$
$$---(2)$$

其中 C.P.V，R.P.V 和 H.P.V.分別表示柯西主值，

黎曼主值以及阿達馬主值。

(b)我們採用常數元素，以及將對偶多倒易法積分方程離散化，得到：

$$p\{u\}=[T]\{u\}-[U]\{t\} \qquad ---(3)$$

$$p\{t\}=[M]\{u\}-[L]\{t\} \qquad ---(4)$$

移項整理之後

$$[\overline{T}]\{u\}=[U]\{t\} \qquad ---(5)$$

$$[M]\{u\}=[\overline{L}]\{t\} \qquad ---(6)$$

其中 $,[\overline{T}]=[T]-p[I],$ 和 $[\overline{L}]=[L]+p[I]$

(c)為了簡單，我們先處理 Neumann 問題，因此(5)、(6)式將簡化為

$$[\overline{T}(k)]\{u\}=\{0\} \qquad ---(7)$$

$$[M(k)]\{u\}=\{0\} \qquad ---(8)$$

式子(7)、(8)即成為一般我們所處理的非線性特徵值問題，不過由於少了虛部的束制條件，將導致增根的現象，所以我們會從式子(7)中得到一些特徵值，不過它們並不會滿足式子(8)，同理我們也會從式子(8)得到一些特徵值，他們也不會滿足式子(7)，故我們定義殘餘值

$$e_{T} = [\overline{T}(k_{M})]\{u_{M}\} \qquad ---(9)$$

$$e_{T} = [M(k_{T})]\{u_{T}\} \qquad ---(10)$$

其中邊界模態$\{u_{M}\}$滿足$[M(k_{M})]\{u_{M}\} = \{0\}$,
$\{u_{T}\}$滿足$[\overline{T}(k_{T})]\{u_{T}\} = \{0\}$,當我們判定哪些是可能真正的特徵值之後，再求出其模態，然後由 nodal lines 及正交特性確定其是真正的根。

(d)另外，還有一種方法，就是使用奇異值分解法，來判定真假根，我們可以先結合(7)、(8)式，使得：

$$[C(k)]_{2N\times N}\{u\}_{N\times 1} = \{0\} \qquad ---(11)$$

其中$[C(k)]_{2N\times N} = \begin{bmatrix} \overline{T}(k) \\ M(k) \end{bmatrix}$

對於真的根而言，矩陣[C(k)]的秩原本為N降為N–1以求得非零解。

所謂奇異值分解法，說明如下：

一過定矩陣$[A]_{m\times n}$,設m是方程式的數量,n是未知數的數目

$$[A]_{m\times n}[x]_{n\times 1} = [b]_{m\times 1}, m > n \qquad ---(12)$$

SVD會把$[A]_{m\times n}$分解成

$$[A]_{m\times n} = [U]_{m\times n}[\Sigma]_{m\times n}[V]^{*}_{n\times n}$$

其中

$$[\Sigma]=\begin{bmatrix} s_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad ,m>n$$

s 即所謂奇異值，且 $s_n \geq s_{n-1} ...... \geq s_1$，當我們有 p 個奇異值等於零時(0 £ p £ n)，也就是說矩陣[A]的秩將降為 n － p，對真的特徵值而言，若秩將降為 n － p 時，即表示此根重根 p 次，可是若為假根的話，矩陣[A]的秩仍是 n，也就是其最小奇異值不為零。

當判斷出示真根之後，若要尋求特徵向量可利用下式去求得：

$$[A]^{+}_{n\times m} = [V]_{n\times n}[\Sigma]^{+}_{n\times m}[U]^{*}_{m\times m}$$

其中 $[\Sigma]^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_n} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{s_1} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad ,m>n$

利用 SVD 技巧除了有效率地判斷真假根之外，還有一好處及能判定特徵值的重根性

三、目標：

探討二維聲場特徵頻率問題，推導多倒易法的奇異積分方程及超奇異方程，並以所求得的影響係數矩陣與對偶邊界元素法做比較，進而探討之間的關係，藉以了解 MRM 發生增根的機制，以建立一套分析自然聲頻與聲模的對偶多倒易法之數值計算方式，以求得含孔洞的二維空間聲場之自然聲模。

四、預期結果：

1. 對偶多倒易法結合奇異值分解法已成功地應用在圓形、方形以及一些含不完全隔開空間的例子上相信應能順利地求出含孔洞的例子。
2. 特地應用對稱的例子，例如圓形的、方形的，對於以前使用牛頓法等來求解特徵值問題，也許會有困難，但是配合使用奇異值分解法，大概除了找出特徵值之外，還能判定他的重根性質。
3. 由於實數型對偶多倒易法與複數型對偶邊界元素法比較之後，少了虛部的限制，導致增根現象產生，所以應能導出為什麼會有增根的機制理論。

五、參考資料:

[1] A.J. Nowak and A.C. Neves, eds. 1994 Multiple reciprocity Boundary Element Method, Southampton: Comp. Mech. Publ.

[2] J.T. Chen and F.C. Wong 1997 Engineering Analysis with Boundary Elements 20(1), 25-33. Analytical derivations for one-dimensional eigenproblems using dual BEM and MRM.

[3] J.T. Chen and F.C. Wong 1998 J. of Sound and Vibration, Dual formulation of multiple reciprocity method for the acoustic mode of a cavity with a thin partition, Accepted.

[4] W. Yeih, J.T. Chen, K.H. Chen, and F.C. Wong 1997 Advances in Engineering Software, 29(1), 7-12. A study on the multiple reciprocity method and complex-valued formulation for the Helmholtz equation.

[5] J.T. Chen 1998 Recent Development of Dual BEM in Acoustic Problems, Keynote lecture, Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics, E. Onate

and S.R. Idelsohn (eds),Argentina,p.106.

[6] J. T. Chen and H.-k. Hong 1992 Boundary element method, New World Press 2nd Ed. , Taipei , Taiwan (in Chinese).

[7] K.H. Chen, J. T. Chen and D.Y. Lion 1998 The Chinese Journal of Mechanics, Dual boundary element analysis for an acoustic cavity with an incomplete partition, Accepted. (in Chinese)

[8] J. T. Chen, K.H. Chen and S. W. Chyuan 1998 Applied Acoustics, Numerical experiments for acoustic modes of a square cavity using dual BEM , Accepted.

[9] J. T. Chen and K.H. Chen 1998 Engineering Analysis with Boun-dary Elements, Dual integral formulation for determining the acoustic modes of a two-dimensional cavity with a degenerate boundary, 21(2), 105-116.

[10] J. T. Chen, C. S. Huang and F.C. Wong, Analysis and exper-iment for acoustic modes of a cavity containing an incomplete partition, Proceedings of the Fourth National Conference on Structural Engineering, Vol.1,pp.349-356,1998.

[11] J. T. Chen and H.-k. Hong 1998 Transations of ASME, Applied Mechanics Review, Review of dual integral representational whit emphasis on Hypersingular integrals and divergent series, Accepted.

[12] M. Petyt, G.H. Koopman and Pinnington 1997 J. Sound and Vibration 53, 71-82. Acoustic modes of rectangular cavity with a rigid incomplete partition.

[13] M. Petyt, J. Lea and G.H. Koopman 1996 J. Sound and Vibra-tion 45, 495-502. A finite element method for determining the acoustic modes of irregular shapes cavities.

[14] N. Kamiya, E. Andoh and K. Nogae 1996 Advances in Engine-ering Software 26, 219-227. A new complex-valued formulation and eigenvalue analysis of the Helmholtz equation by boundary element method.

[15] W. Yeih, H.T. Chen and C.M. Chang 1998 Engineering Analysis with Boundary Elements, Applications of dual MRM for determ-ining the natural frequencies and natural modes of an Euler-Ber-noulli beam using the

singular value decomposition method, Revised.

[16] W.T. Press, S.A. Teukosky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery, Numerical Recipes in FORTRAN, 2nd edition, Cambridge University Press, New York, 1992.

[17] G.H. Golub and C.F. Van Loan, Matrix Computations, 2nd edition, The Johns Hopkins University press, Baltimore, 1989.