

科技部補助
大專學生研究計畫研究成果報告

計 畫 ： Fredholm二擇一定理在結構力學上的應用 名 稱
--

執行計畫學生：邵程祥

學生計畫編號：MOST 109-2813-C-019-010-E

研究期間：109年07月01日至110年02月28日止，計8個月

指導教授：郭世榮

處理方式：本計畫可公開查詢

執行單位：國立臺灣海洋大學河海工程學系

中華民國 110年03月11日

目錄:

(一). 摘要	2
(二). 研究動機	2
(三). 文獻回顧與探討	3
(四). 問題描述	6
(五). 研究方法與理論	7
5.1 Fredholm 二擇一定理	7
5.1.1 奇異值分解(SVD)	7
5.1.2 特徵值與特徵向量	9
5.2 自救法	14
5.3 高斯消去法	16
5.4 最小平方法(Least squares)	17
(六). 結論	19
(七). 致謝	19
(八). 參考文獻	20

(一). 摘要

矩陣操作與求逆是工程師進行數值方法分析模擬時最基礎也是最重要的數理工具。在結構動力學中，對於多自由度系統的振動模擬，更是不可或缺。對於在束制條件(constraint)下的結構物其柔度矩陣[F]與勁度矩陣[K]存在著互逆關係。然而對於部分航太領域中的結構物，因物理(自由端)或數學(病態)導致勁度與柔度矩陣秩降(存在剛體運動項)而不可逆。因此數學家便定義出廣義逆矩陣，解決此類問題。結合奇異值分解與加邊矩陣的自救法，其數學構造亦是一種廣義逆矩陣。而工程師則是透過虛擬剛體連桿(dummy link)進行求解。透過本計畫的研究，我們利用奇異值分解法、Fredholm 二擇一定理等線性代數理論，可以將無束制結構的勁度和柔度奇異矩陣其對應在數學與力學鏈結，搭配線性代數理論中四個向量子空間去理解矩陣系統解空間及其所對應之力學內涵，並且可以發現 Fredholm 二擇一定理有解或無解條件之物理意義。

(二). 研究動機

學生於 2018 年修習海洋大學河海工程學系陳正宗特聘講座教授在大學部所開設之工程數學課程，其中看到老師能以生動活潑的教學方式，以及將數學與力學結合的教學內容講得神靈活現，使得數學背後有力學內涵、而力學蘊含著數學模式，能夠讓我學習得非常紮實，並且體會到數學並非只是單純的符號運算，而是富含著物理與力學意義，後來得知陳老師是國內首位數學與力學雙會士，也就不足為奇了。大三時，學生修習由海洋大學河海工程學系郭世榮主任開設的結構學課程，其中看到老師以簡單明瞭的教學方式教導結構學重要的基本知識，讓我有想更加深入學習有關結構學的知識。因此有了想跟老師們學習更多知識的動力，毅然決然辭掉在補習班的工讀，進入由郭世榮主任與陳正宗特聘講座教授共同主持的 NTOU/MSV 研究團隊學習。

因此，為了獲得更多數學與力學的相關知識，學生於 2019 年，大三時，修習海洋大學河工系陳正宗特聘講座教授於碩士班開設的課程「邊界元素法」。在每堂課結束後老師都會提出一個問題，讓我們用一星期的時間進行思索解答。在學期初這對我而言是相當的困難，但是經過了一段時間的訓練以及實驗室中學長姊的幫助，讓我慢慢地能夠自行解出答案，其成就感也是未曾有過的。我也在這門課程中接觸並學習 Mathematica 符號運算軟體的應用。這門課程使我獲益良多，也使我的數理觀念與基礎更加穩固。在進入 MSV 實驗室後看到許多學長姊在科技部大專生專題計畫成功的成果，以及許多在 SCI 學術期刊中發

表的文章，如表一所示，更堅定自己想做研究的念頭。希望透過執行科技部大專生研究計畫，透過體驗做研究的過程，從中學習和提升做研究的能力，進而充實自己大學生活，以及對未來升學與在工作處事上能夠有所幫助。過程中肯定做中錯，錯中學，學中做，但必定會有成長。

在 2020 年寒假期間，陳老師邀請台大土木系林聰悟名譽教授來進行延平講座演講(附件一)，演講題目是「從結構力學談線性代數中矩陣秩降現象」，林老師以樑的勁度矩陣當例子來說明矩陣秩降與結構力學的關聯性。由於這次演講，讓我對於結構力學中的勁度矩陣秩降後的各種問題感到好奇有趣。更榮幸的是，經過師生互動交流後，林聰悟老師不嫌棄我是懵懵懂懂的大學生，願意協助郭世榮老師與陳正宗老師來共同指導我學習做研究。因此以「Fredholm 二擇一定理在結構力學上的應用」為題申請科技部大專學生研究計畫。假設勁度矩陣為一 $n \times n$ 階矩陣，在結構學課本中提到勁度矩陣為柔度矩陣之逆也就是 $[K]=[F]^{-1}$ ，但是如果當這個結構物處於自由-自由(無任何束制)時就會導致勁度矩陣產生秩降，使得矩陣奇異，因此就無法直接由傳統定義求解柔度矩陣以及力與位移關係。因此需使用 Fredholm 二擇一定理進行分析，並且藉由奇異值分解、Moore-Penrose 廣義逆矩陣、奇異矩陣 LDU 分解和增加虛擬剛體連桿[1]等方法去探討並連結數學與力學之間的關聯，這些不同的數學工具或工程想法將在此計畫獲得鏈結。

(三). 文獻回顧與探討

在邊界元素法(BEM)中的退化尺度、退化邊界、虛擬頻率和假根問題與有限元素法(FEM)中的沙漏模式存在著矩陣秩降(rank deficiency)問題。從物理的觀點來看，當一個構造物為自由-自由(無束制條件)結構時，存在剛體模態(rigid body mode)使得這個自由-自由結構的勁度矩陣奇異；從數學來看，在 Laplace 方程的 Neumann 邊界條件問題或 Navier 方程的曳引力問題上會產生非唯一解，以及勢能理論中的二維 Dirichlet 問題或受約束結構的二維彈性問題用邊界元素法求解時也可能會導致影響矩陣秩降及解的非唯一性[2-8]，表二簡單列表出數學與結構力學的關係。

有關於奇異勁度和柔度矩陣的求解，陳等人[9, 10]利用自救法，使原奇異勁度或柔度矩陣增邊成一個加邊非奇異矩陣，也就是升元滿秩，接著再通過對非奇異矩陣求逆從而能於加邊矩陣中獲得逆矩陣，而其子矩陣恰為廣義逆矩陣，並且舉了一維至三維結構為例驗證此法的可行性，此結果還曾在 2019 年力學期刊獲得固力組最佳論文獎。陳等人[2]透過邊界積分方程式的概念，利用直接法和間接法，推導了對偶積分方程式，並且在從中推導出桿和樑元素的勁度和柔度矩陣。

Felippa [3、8]說明自由-自由柔度矩陣基於子結構的算法的應用，以及建構出自由-自由柔度矩陣可以藉由對勁度矩陣進行廣義逆矩陣的操作求得，並且也說明了勁度矩陣與柔度矩陣的廣義逆性質。林等人[1]也提供了一個分解大型奇異矩陣的方法，在高斯消去法的過程中，即使樞紐元素為零時，也可以不必列行交換，且在保持對稱矩陣條件下，也能求解並得到秩(rank)與零化度(nullity)。

有關廣義逆理論於二十世紀時 Fredholm、Hilbert、Schmidt、Bounitzky、Hurwitz 等人均曾對於廣義逆有所研究[11]。最早在 1903 年，Fredholm 就引入了積分算子的偽逆之概念，偽逆或稱做廣義逆(generalized inverse)矩陣則由 Moore 於 1920 年利用投影的方法給予了廣義逆的嚴謹定義。後來 Penrose [12]於 1955 年獨立提出類似的想法，並用四個矩陣方程式以非常簡單直觀的方式給出了廣義逆的等價定義並且提供了一些矩陣用於廣義逆操作可得唯一解的證明，也因為 Moore 與 Penrose 對於廣義逆理論作出的偉大貢獻，使得後來學者統一稱之為 Moore-Penrose 廣義逆矩陣。Hartwig [13]利用奇異值分解以及加邊矩陣對 Moore-Penrose 廣義逆進行操作和推導，但其內容大多是一些數學符號上的運算，而對於物理上的意義就著墨甚少。在 Adi [11]的書中，作者對廣義逆的數學操作做了很多的推導證明。

奇異值分解法對於線性代數研究是個相當重要的工具，並且運用的問題非常廣泛，陳等人將奇異值分解法和 Fredholm 二擇一定理應用於連體力學(continuum mechanics) [14]及聲學中的假根(spurious eigenvalues)與虛擬頻率(fictitious-frequency)問題[15]，其中補充行(updating document by column)補充列(updating term by row)的技巧用來濾假存真，這些想法是取自 google 搜尋引擎資料檢索(data retrieval)的概念。

從過去的文獻中已經可以發現對於求解自由-自由結構的勁度和柔度矩陣雖然已經有著大量的研究，但從不同領域，數學與力學的鏈結著墨甚少。因此本計畫以結合奇異值分解法與 Fredholm 二擇一定理，研究與統合結構矩陣秩降的問題，解釋其存在的數學和力學意義。

表一 NTOU/MSV 大學部學生SCI論文成功案例 (1995-2020)

姓名	研究課題	SCI 期刊
鄭岳世 (1996)	Dual series representation and its applications to a string subjected to support motions	ADV
陳桂鴻 (1998)	Analytical study and numerical experiments for Laplace equation with overspecified BCs	AMM
劉立偉 (2000)	On the free terms of the dual BEM for the two and three- dimensional Laplace problems	JMST
林盛益 (2002)	A new point of view for the polar decomposition using singular value decomposition	IJCN
葉雅婷 (2004)	A meshless method for free vibration analysis of circular and rectangular clamped plates using radial basis function	EABE
蔡明宏 (2008)	Conformal mapping and bipolar coordinate for eccentric problems	CAEE
高聖凱 (2008)	Waves in string using diamond rule and Mathematica software	CAEE
謝正昌 (2008)	Derivation of stiffness and flexibility for rods and beams by using dual integral equations	EABE
吳國綸 (2008)	Regularized meshless method for Cauchy problems	CM
李家瑋 (2008)	On the spurious eigensolutions for the real-part boundary element method	EABE
余尚儒 (2008)	Equivalence between Trefftz method and method of fundamental solution for the annular Green's function	EABE
蕭宇志 (2010)	Analysis of water wave problems containing single and multiple cylinders by using the degenerate kernel method	ISOPE
高怡絹 (2014)	Eigenanalysis for a confocal prolate spheroidal resonator using the null-field BIEM in conjunction with degenerate kernels	Acta Mechanica
涂雅濤 (2014)	A self-regularized approach for deriving the freefree flexibility and stiffness matrices	C & S
涂雅濤 (2016)	Focusing phenomenon and near-trapped modes of SH waves	EEEV
黃乙玲 (2019)	Revisit of the degenerate scale for an infinite plane problem containing two circular holes using conformal mapping	AML
邵程祥、呂政軒	On the linkage between influence matrices in the BIEM	JOM

(2021)	and BEM to explain the mechanism of degenerate scale	
周彥廷 (2021)	On the path independence and invariant of the J-integral for a slant crack and rigid-line inclusion using degenerate kernels and the dual BEM	EABE

表二 數學與結構力學對應關係

數學	結構力學
零空間 (Null space)	假模態；剛體模態 (Spurious mode)；(Rigid body mode)
秩降 (Rank deficiency)	自由結構 (Free-Free structure)
加邊矩陣 (Bordered matrix)	增加虛擬桿件自由度 (Adding an extra degree of freedom)
廣義逆矩陣 (Generalized inverse) (Moore-Penrose)	自由-自由柔度矩陣 (Free-free flexibility matrix) 自由-自由勁度矩陣 (Free-free stiffness matrix)
影響矩陣 (Influence matrix)	勁度矩陣和柔度矩陣 (Stiffness or flexibility matrix)

(四). 問題描述

結構分析的目的主要為決定結構內各部件因外部作用而產生之力，同時求得結構各個控制點之變位，了解整個結構系統力與變位之關係。因此從結構學中我們可以得知勁度 K 、柔度矩陣 F 、力 p 與變位 u 存在著如以下的形式：

$$[K]\{u\} = \{p\} \quad (4.1)$$

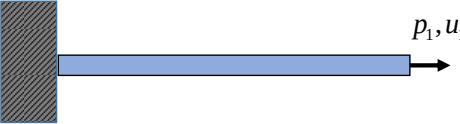
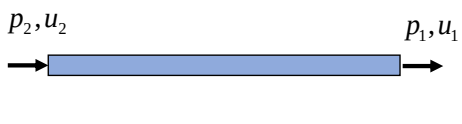
以及

$$[F]\{p\} = \{u\} \quad (4.2)$$

在(4.1)、(4.2)式中，我們可以很直接的觀察到勁度矩陣與柔度矩陣互為逆矩陣之關係($[K]^{-1} = [F]$)，因此對於具有束制條件的結構系統，我們僅須對勁度矩陣簡單的求逆即可得到結構系統力與變位關係。然而，當這個結構物是在自由-自由的條件下，會因矩陣秩不足而產生勁度矩陣奇異的狀況，使得柔度矩陣無法單純對勁度矩陣求逆導得或是說(4.1)式無法輕易地被求解，舉一維樑為例如表三

所示。因此如何處理這類型的病態(ill-posed)矩陣就是一個值得研究的地方。

表三 具束制與無束制之一維樑

	具束制條件	無束制條件 自由-自由
Rod		
Beam		

(五). 研究方法與理論

5.1 Fredholm 二擇一定理

5.1.1 奇異值分解(SVD)

對於一般的線性代數系統，可表示成如下形式：

$$[A]_{2N \times 2N} \{x\}_{2N \times 1} = \{b\}_{2N \times 1} \quad (5.1)$$

其中 b 為已知項， x 為待解未知項， A 可以是任意矩陣如： K 、 F 等。藉由

引入奇異值分解，矩陣 A 可以被分解成如下形式：

$$[A]_{2N \times 2N} = [\Phi]_{2N \times 2N} [\Sigma]_{2N \times 2N} [\Psi]^T_{2N \times 2N} = \sum_{i=1}^{2N} \sigma_i \{\phi_i\} \{\psi_i\}^T \quad (5.2)$$

其中 $[\Sigma]$ 為對角矩陣 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_{2N}$ ，左奇異矩陣為 $[\Phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_{2N}\}]$ ；

右奇異矩陣為 $[\Psi] = [\{\psi_1\}, \{\psi_2\}, \dots, \{\psi_{2N}\}]$ 。根據奇異值分解的構造和奇異向量的

的基底，未知向量 x 可以表示成右奇異向量的線性組合：

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{2N} \alpha_i \{\psi_i\} \quad (5.3)$$

同樣地，外力向量 b 可以表示成左奇異向量的線性組合如下形式：

$$\{b\} = \sum_{i=1}^{2N} \beta_i \{\phi_i\} \quad (5.4)$$

將(5.2)、(5.3)與(5.4)式帶入(5.1)式，可以得到

$$\sum_{k=1}^{2N} \sigma_k \alpha_k \{\phi_k\} = \sum_{i=1}^{2N} \beta_i \{\phi_i\} \quad (5.5)$$

接者將(5.5)式等號左側和右側同時內積上 ϕ_j ，由於奇異值向量皆互為正交向量基底，所以當 j 與 k 、 i 相等時才会有值，因此可以得到

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\sigma_j}, j = 1, 2, \dots, 2N \quad (5.6)$$

(5.6)式中， β_j 是 b 的參與因子(Participation factor)也可叫做負載參與因子(Load participation factor)，而 α_j 稱為有效參與因子(Effective participation factor)。如果矩陣 A 的秩為 r ，這表示有奇異值 $\sigma_i = 0, i = 1, 2, \dots, 2N - r$ 。從線性變換的觀點， A 為一個將 x 映射(Mapping)至 b 的操作元，並且 b 屬於 A 的值域(Range)，因此 A 可視為具有 $\{\phi_i\} = 0, i = 1, 2, \dots, 2N - r$ 的值域缺損。Fredholm 二擇一定理中的判別式：

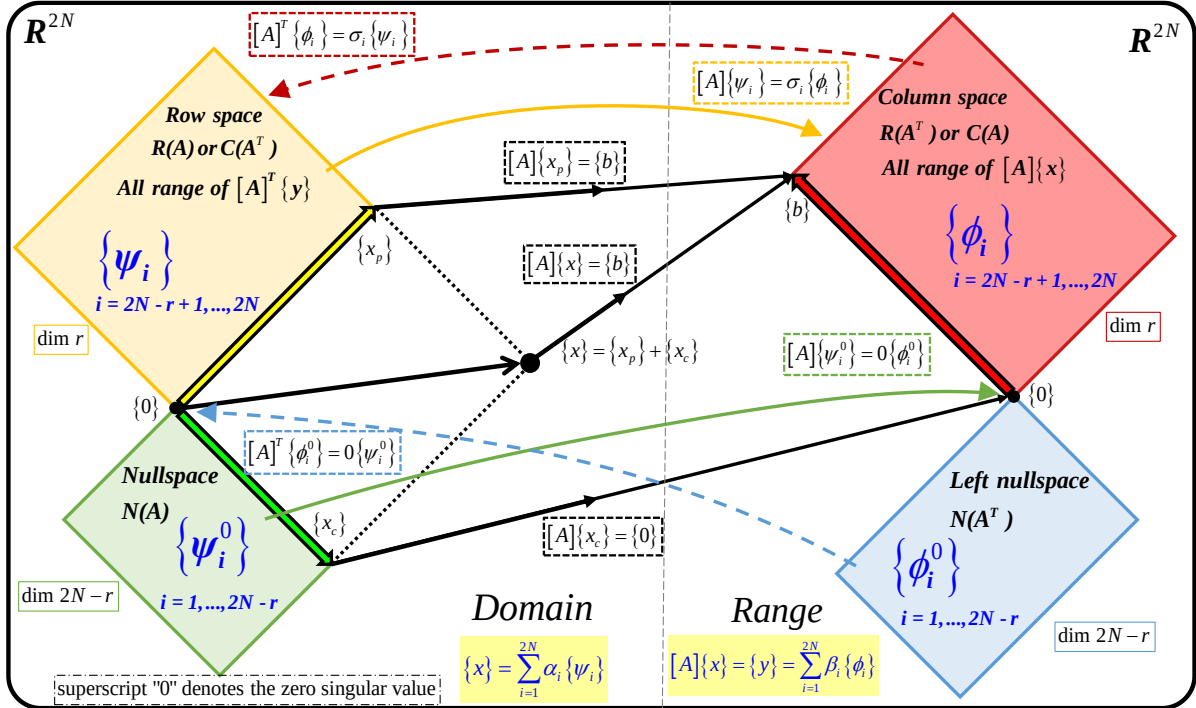
$$[A]^T \{\phi_i\} = 0, i = 1, 2, \dots, 2N - r \quad (5.7)$$

從(5.7)式中可以看出， $\{\phi_i\}$ 就是存在於值域中的一個子空間，即左零空間(Left null space, $\{\phi_i\} \in N(A^T), i = 1, 2, \dots, 2N - r$)。在(5.6)式中，當 $\beta_i = 0, i = 1, 2, \dots, 2N - r$ ，表示外力向量 b 不包含任何一個左零空間中的向量，所以我們稱 x 為無限多解並且其中包含著一個特解以及無窮的補解群；當 $\beta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, 2N - r$ ，則相反，為無解情形。Fredholm 二擇一定理之關係可整理如下：

$$\begin{cases} \{b\}^T \{\phi_i\} = 0, \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \frac{0}{0} \text{ (Infinite solutions)} \\ \{b\}^T \{\phi_i\} \neq 0, \beta_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = \frac{c}{0}, c \neq 0. \text{ (no solutions)} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, 2N - r \quad (5.8)$$

有關整個 A 之映射關係可以圖一[18]呈現。圖中說明各正交基底向量與矩陣 A

之映射關係，而黃色區塊、紅色區塊、綠色區塊以及藍色區塊分別為矩陣 A 之列 $R(A)$ 、行 $C(A)$ 、零 $N(A)$ 以及左零 $N(A^T)$ 空間。



圖一 $[A]$ 之映射關係

5.1.2 特徵值與特徵向量

除了使用奇異值分解技巧外，也可以利用特徵值方法幫助我們了解 Fredholm 二擇一定理之幾何以及物理意涵。我們舉表三中無束制條件之桿件以及正三角形桁架為例子。已知一維桿與樑之勁度矩陣分別為：

$$[K_{rod}] = [K_{rod}]^T = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

以及

$$[K_{beam}] = [K_{beam}]^T = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

其中 E 是彈性模數， I 是截面二次矩， L 為樑長度、 A 為截面積，為了不失一般性，我們令 E 、 I 、 L 以及 A 為 1。在線性代數理論中，一般的特徵值方程式為：

$$[A] [\{\nu_1\}; \{\nu_2\}; \dots; \{\nu_{2N}\}] = [\{\nu_1\}; \{\nu_2\}; \dots; \{\nu_{2N}\}] [\lambda] \quad (5.11)$$

其中 $[\lambda]$ 為對角矩陣 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{2N}$ 。從(5.11)式我們可以知道(5.7)式為具零特徵值的特徵值方程式。因此我們可以分別得到(5.9)與(5.10)式特徵值為零對應之特徵值方程式如下：

$$[K_{beam}]^T [v_{r1}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

以及

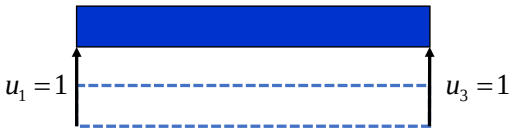
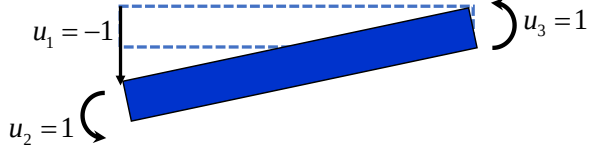
$$[K_{beam}]^T [v_{b1}; v_{b2}] = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\{0\}; \{0\}] \quad (5.13)$$

(5.12)與(5.13)式中之特徵向量即分別為一維桿($\{v_{r1}\}$)與樑($\{v_{b1}\}, \{v_{b2}\}$)之剛體運動模式如表四、五所示。

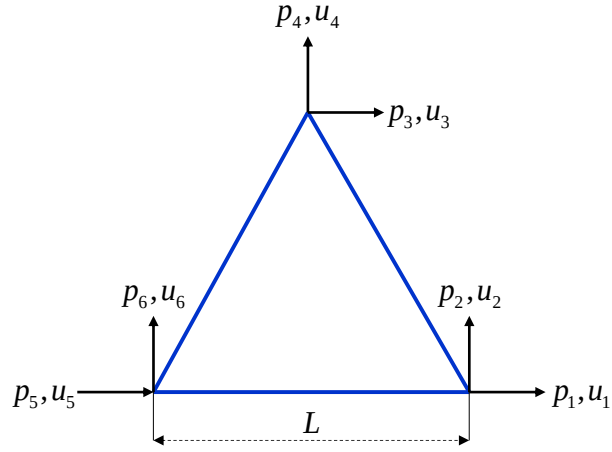
表四 一維桿之剛體運動

剛體運動(平移)	
	$\{v_{r1}\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

表五 一維樑之剛體運動

剛體運動(平移)	剛體運動(旋轉)
	
$\{v_{b1}\} = \langle 1, 0, 1, 0 \rangle^T$	$\{v_{b2}\} = \langle -1, 1, 0, 1 \rangle^T$

利用相同的步驟，我們再舉一個例子，有一個正三角形桁架如下圖二，



圖二 自由-自由正三角形桁架自由度示意圖

其勁度矩陣為：

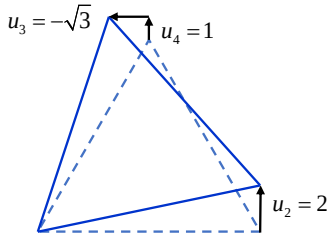
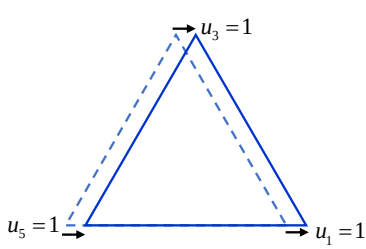
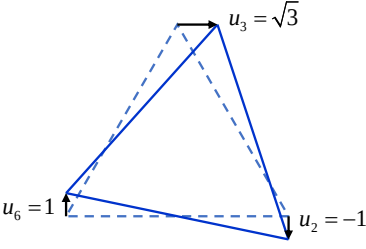
$$[K_{truss}] = [K_{truss}]^T = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

(5.14)式為一奇異矩陣且秩為 3，因此我們同樣可以得到(5.14)式的三個特徵向量如下：

$$\{v_{t1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \{v_{t2}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \{v_{t3}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.15)$$

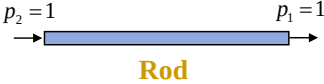
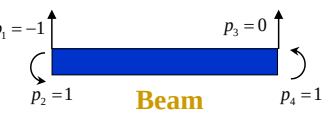
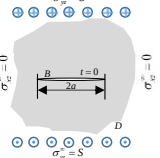
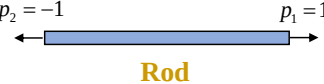
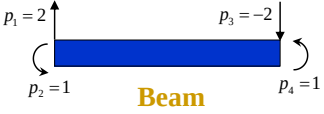
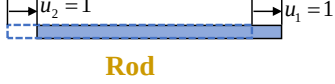
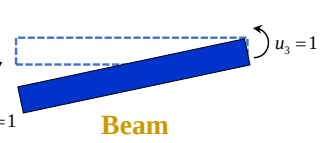
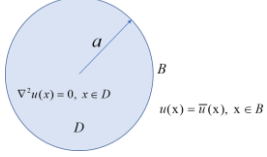
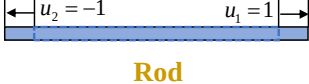
(5.15)式中，這三個特徵向量為圖二中桁架之剛體運動模態如表六所示。

表六 正三角形桁架之剛體運動

剛體運動(旋轉-逆)	剛體運動(平移)	剛體運動(旋轉-順)
		
$\{v_{t1}\} = \langle 0, 2, -\sqrt{3}, 1, 0, 0 \rangle^T$	$\{v_{t2}\} = \langle 1, 0, 1, 0, 1, 0 \rangle^T$	$\{v_{t3}\} = \langle 0, -1, \sqrt{3}, 0, 0, 1 \rangle^T$

從以上兩個算例可以清楚地了解，利用(5.7)、(5.11)式我們可以求得 $[K_{beam}]^T$ 以及 $[K_{truss}]^T$ 之特徵向量，這說明這些剛體運動向量都是由矩陣的 ϕ ($\phi \in N(A^T)$) 為基底組成。有關於 Fredholm 二擇一定理有解條件的物理意義就可以很清楚地了解。在(4.1)、(4.2)式中變位 u 分別是勁度矩陣與柔度矩陣的定義域和值域，而力 p 則是勁度矩陣與柔度矩陣的值域和定義域。對(4.2)式，若這個結構的變位 u 是由剛體運動所組成，如此以來我們必然無法找到(4.2)式的解，表示這個結構無額外束制條件，符合 Fredholm 所宣稱的(5.8)式中的無解。而對於(4.1)式，則是力不平衡之狀況。因此，對於柔度矩陣可以將 Fredholm 二擇一定理中的有無解條件理解為是否含有剛體運動；而至於勁度矩陣則可以理解為一個結構物之力平衡條件。表七所示物理(勁度與柔度)與數學模型(邊界元素法)中 Fredholm 二擇一定理於解空間無解與有解之比較關係。

表七 Fredholm 二擇一定理

Physics (Structural Analysis)	Mathematics (BIEM)
Stiffness : $[K_{beam}]\{u\} = \{p\}$	$\int_B M(x,s)u(s)dB(s) = \int_B L(x,s)t(s)dB(s)$
力不平衡 No solution $\{p\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$  Rod $\{p\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$  Beam	裂縫問題(Neumann邊界條件, Traction free) $\int_B L(x,s)t(s)dB(s)$ 含偶函數基底  $u(s)$ No solution 解空間缺損對稱基底
力平衡 Infinite solution $\{p\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$  Rod $\{p\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$  Beam	$\int_B L(x,s)t(s)dB(s)$ 不含偶函數基底 $u(s)$ Infinite solution
Flexibility : $[F_{beam}]\{p\} = \{u\}$	$\int_B U(x,s)\phi(s)dB(s) = u(s)$
含剛體運動項 No solution $\{u\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$  Rod $\{u\} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$  Beam	退化尺度時 Dirichlet邊界條件 邊界上給常數位移  $u(s) = 1$ $\phi(s)$ No solution 解空間缺損剛體運動項
不含剛體運動項 Infinite solution $\{u\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$  Rod $\{u\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$  Beam	$u(s)$ 不含常數基底 $\phi(s)$ Infinite solution

5.2 自救法

由於無額外束制之結構矩陣是奇異矩陣，所以對反矩陣需要特別注意。因此，可以使用 SVD 和增邊矩陣對奇異矩陣進行正則化，而這些也可以用 Fredholm 二擇一定理解釋。從(5.6)式可以看出，如果一個矩陣有奇異值 $\sigma_i (i=1,2,\dots,2N-r)$ 為零，則會有 $\alpha_i (i=1,2,\dots,2N-r)$ 無法被決定。因此為了得到唯一的解，我們可以強迫 α_i 為零如下：

$$\{x_p\}^T \{\psi_i\} = \{0\}, \quad i=1,2,\dots,2N-r \quad (5.16)$$

其中我們可以視 $\{x_p\}$ 為不包含任何補解成分之特解。由於值域缺損，因此可以將(5.1)式正則化如以下形式：

$$[A]\{x_p\} + \sum_{i=1}^{2N-r} c_i \{\phi_i\} = \{b\} \quad (5.17)$$

其中 c_i 是待定係數。藉由將(5.16)與(5.17)式合併我們可以得到：

$$\begin{bmatrix} [A] & \{\phi_i\} & \cdots & \{\phi_{2N-r}\} \\ \{\psi_1\}^T & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\psi_{2N-r}\}^T & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(4N-r) \times (4N-r)} \begin{bmatrix} \{x_p\} \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{2N-r} \end{bmatrix}_{(4N-r) \times 1} = \begin{bmatrix} \{b\} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(4N-r) \times 1} \quad (5.18)$$

因此就可以得到增邊矩陣 $[A_b]$ 為：

$$[A_b]_{(4N-r) \times (4N-r)} = \begin{bmatrix} [A] & \{\phi_i\} & \cdots & \{\phi_{2N-r}\} \\ \{\psi_1\}^T & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\psi_{2N-r}\}^T & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(4N-r) \times (4N-r)} \quad (5.19)$$

此時 $[A_b]$ 為非奇異矩陣，在(5.18)式中的 $\{x_p\}$ 以及 c_i 就可以很輕易的被求得。當

問題之線性代數系統的解若為無窮多解情況， c_i 則必定為零 ($c_i = \{b\}^T \{\phi_i\}$)。

算例(一維樑)：

我們可以將(5.10)式之一維樑勁度矩陣以(5.2)式做奇異值分解如下所示：

$$\begin{aligned}
[K_{beam}] &= [\Phi][\Sigma][\Psi]^T \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \end{bmatrix}^T \quad (5.20)
\end{aligned}$$

將(5.20)式代入(5.18)式，並且給其一組滿足 Fredholm 二擇一定理無限多解狀況

下之外力項($\{b\}^T \{\phi\} = 0$)。藉此線性代數系統可以擴增成：

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} \\ 6 & 4 & -6 & 2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ -12 & -6 & 12 & -6 & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ 6 & 2 & -6 & 4 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{15}} & \sqrt{\frac{3}{5}} & \frac{1}{\sqrt{15}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 12 \\ -24 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

此時增邊矩陣滿秩，為求得結構之變位只需逆矩陣即可

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

其中 $\{u\} = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle^T = \langle 4/5, 2/5, -4/5, 2/5 \rangle^T$ 即為這個線性方程組之特解。

5.3 高斯消去法

高斯消去法為在線性代數中常見的一種用於求解 n 元一次線性方程組的算法，利用消去與代入即可得解。在前面，有關 Fredholm 二擇一定理之有解條件我們已經做了詳細的探討。接著，在這個部分我將舉一維樑在兩種外力條件(力平衡、力不平衡)下，在使用高斯消去法解奇異矩陣時之關係。給以下無束制一維樑於力平衡下之線性方程組：

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 12 \\ -24 \\ 12 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

在經過高斯消去過程後，我們可以得到：

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

在(5.24)式中，由於 u_3 與 u_4 無法找到對應值，因此我分別令 u_3 與 u_4 為 c 與 d ，可以得到以下關係式：

$$\begin{cases} 12u_1 + 6u_2 - 12u_3 + 6u_4 = 24 \\ u_2 - u_4 = 0 \\ u_3 = c \\ u_4 = d \end{cases} \quad (5.25)$$

因此(5.23)式之解可以求得並且我們其中無窮多解的部分可以理解為這個方程式之補解即為剛體運動，如下所示：

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2+c-d \\ d \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + d \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

然而(5.26)式中 $\langle 2, 0, 0, 0 \rangle^T$ 雖是(5.23)式之特解，但非不含奇異值向量之唯一特解，而與奇異值分解所得之特解不同，但其差異一定可以由補解(奇異值向量或剛體運動向量)組成。奇異值向量雖然互為正交，但因特徵值同為零亦會有不同組合。剛體運動向量雖不具正交性，但均可由奇異值向量組成。為做比較，我將(5.26)式以奇異值向量表示

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + c \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + d \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{Bmatrix} + \frac{-2-c+3d}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} + \frac{4+5c}{\sqrt{15}} \begin{Bmatrix} \frac{2}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

結果與自救法者相同。討論完力平衡狀況。接著，給以下無束制一維樑於力不平衡下之線性方程組：

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 12 \\ -24 \\ 18 \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

在經過高斯消去過程後，我們可以得到：

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

在(5.29)式中，可以看出一個矛盾的地方， $0u_3 = 6 (u_3 = \infty)$ ， u_3 不可能被決定，因此(5.28)式無解。從使用高斯消去法的過程，同樣可以得到與 Fredholm 二擇一定理一樣的結果。其物理的感覺可以是已知外力項要平衡，而從線性變換之觀點則是若合力向量含有左零向量則會無解。

5.4 最小平方方法(Least squares)

在線性代數的理論中，假如未知外力項不完全屬於矩陣之行空間，從 Fredholm 二擇一定理的角度來看這表示無解。而如果問題可以接受最佳近似解，就只需將 $\{b\}$ 投影至 $C(A)$ 。此時的誤差向量就有最小之平方長度

$$\min_x \|[A]\{x\} - \{b\}\|_2^2 \quad (5.30)$$

藉由(5.30)之定義我們可以得到

$$[A]^T [A] \{x\} = [A]^T \{b\} \quad (5.31)$$

因此我們只需求出(5.31)式之解就為此方程組之最佳近似解。此方法常見於迴歸分析，對於方程組過定之情形，也就是線性方程式多於未知數，藉由一個轉置矩

陣將原本過定之方程組正規化，使其只需對 $[A]^T[A]$ 求逆就可得解。從矩陣線性變換和向量組合的觀點， $\{b\}$ 可以由矩陣之右奇異向量組成，其包含了矩陣之左零向量。在 Fredholm 二擇一定理中我們知道 $[A]^T\{\phi\}=0$ ，因此(5.31)式可視為將 $\{b\}$ 在左零向量基底篩除，進而使方程組能找出在 $R(A)$ 之一最佳近似解。然而，此時我們又會碰到一個問題，對於無額外束制條件之勁度矩陣，儘管其並無方程組過定之情形，我們仍將其套入這個數學模型，會發現原本就奇異之勁度矩陣在多乘一個轉置矩陣仍然奇異。如果我們欲求得唯一特解，其必定屬於矩陣 $[A]$ 之列空間，並代入(5.1)式可以得到

$$[A]\{x_p\} = \sum_{i=2N-r+1}^{2N} \sigma_i \alpha_i \{\phi_i\} \quad (5.32)$$

接著求出 $\{b\}$ 於 $[A]$ 行空間的正交投影，我們可以得到

$$\{b_p\} = \left(\sum_{i=2N-r+1}^{2N} \{\phi_i\} \{\phi_i\}^T \right) \{b\}, \{b_p\} \in C(A) \quad (5.33)$$

將(5.32)與(5.33)式合併可得

$$\sum_{i=2N-r+1}^{2N} \sigma_i \alpha_i \{\phi_i\} = \left(\sum_{i=2N-r+1}^{2N} \{\phi_i\} \{\phi_i\}^T \right) \{b\} \quad (5.34)$$

在(5.34)式兩邊同乘 $\{\phi_i\}^T$ ， $i=2N-r+1, \dots, 2N$ ，並將奇異值除至等號右側可得

$$\alpha_i = \frac{1}{\sigma_i} \{\phi_i\}^T \{b\}, i=2N-r+1, \dots, 2N \quad (5.35)$$

從這裡我們可以得到 $\{\psi_i\}$ 之權重，再將其乘上 $\{\psi_i\}$ 就可得到唯一特解 $\{x\}$ ：

$$\{x\} = \sum_{i=2N-r+1}^{2N} \alpha_i \{\psi_i\} = \sum_{i=2N-r+1}^{2N} \frac{1}{\sigma_i} \{\psi_i\} \{\phi_i\}^T \{b\} \quad (5.36)$$

有趣的是，我們知道一奇異矩陣雖然並不存在逆矩陣，但是一定有偽逆矩陣表示如下：

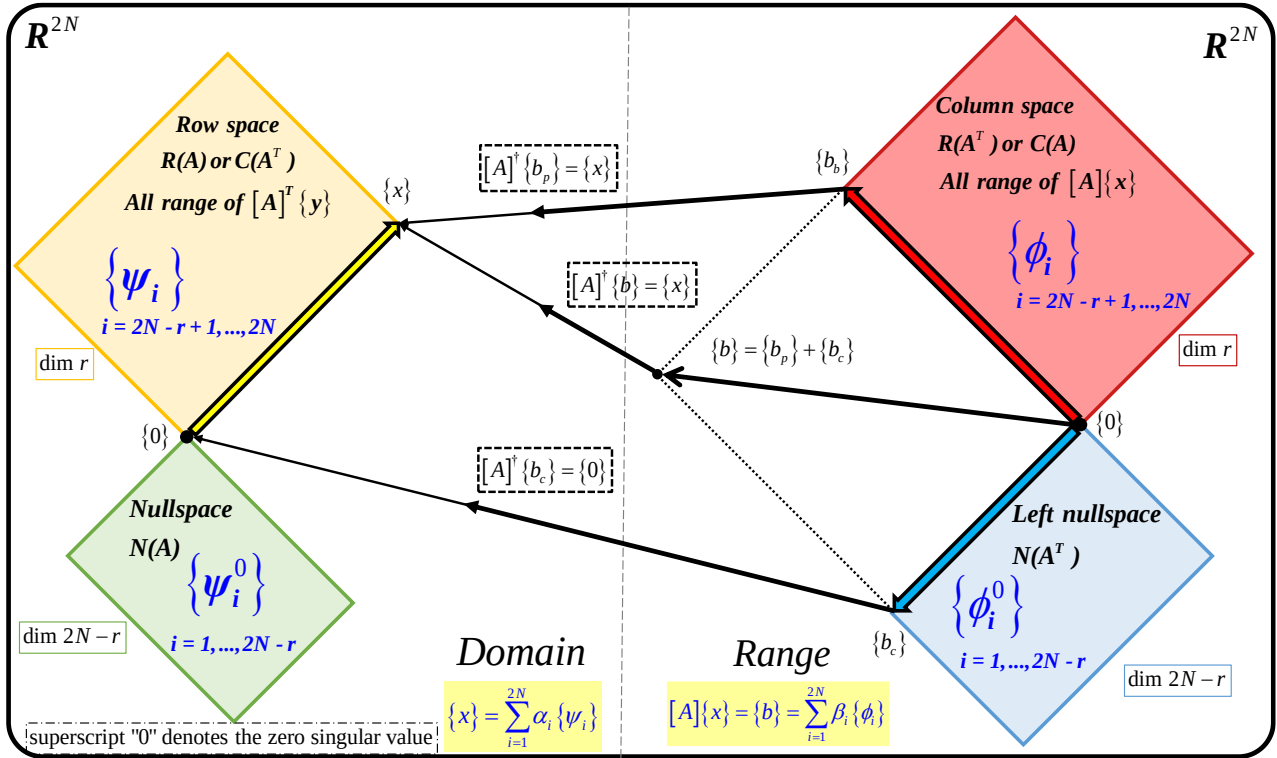
$$[A]_{2N \times 2N}^\dagger = [\Psi]_{2N \times 2N} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\sigma]^{-1} \end{bmatrix} [\Phi]_{2N \times 2N}^T = \sum_{i=1}^{2N-r} 0 \{\psi_i\} \{\phi_i\}^T + \sum_{i=2N-r+1}^{2N} \frac{1}{\sigma_i} \{\psi_i\} \{\phi_i\}^T \quad (5.37)$$

所以最佳近似解就可藉由偽逆矩陣求得

$$\{x\} = [A]^\dagger \{b\} \quad (5.38)$$

因此偽逆矩陣之應用也可在此看出。而有關偽逆矩陣 $[A]^\dagger$ 之映射關係可以同線

性代數大師“G. Strang”著書之封面如圖三[18]之方式呈現。



圖三 偽逆矩陣 $[A]^\dagger$ 之映射關係

(六). 結論

透過本計畫的研究，利用奇異值分解法、Fredholm二擇一定理與偽逆矩陣，研究自由-自由結構的勁度和柔度矩陣等結構矩陣與線性代數理論，討論了幾個求解奇異矩陣之方程組的方法。將不同領域之數學與力學的鏈結，使得工程穿過數學，數學穿過工程，進而彼此互通。並且我們也充分的認識有關於矩陣四個子空間之映射關係與其對應之力學意義。並詳細的探討Fredholm二擇一定理中有無解條件對於勁度與柔度矩陣分別之力學內涵為一個結構物之力平衡條件以及是否含有剛體運動。並幫助我們對於整個矩陣解空間有更好的掌握。

(七). 致謝

感謝科技部提供的機會，使我能夠參與 109 年度科技部大專生專題研究計畫(計畫編號:109-2813-C-019-010-E)。讓我在做研究和學習的過程中，還額外有獎學金補助，使我在執行計畫這段期間能無後顧之憂，並得到軟硬體環境的支助，使我能在修課外，能全心全意投入在此專題研究計畫上。也非常感謝台大土木林聰悟名譽教授的提點，海洋大學河工系的郭世榮主任與陳正宗特聘講座教授的指導，以及力學聲響振動實驗室的學長們在執行計畫期間不厭其煩的指導，從計畫一送出到今年三月為了讓我更了解做研究的事，每項細節都鉅細靡遺的解釋

使我能夠如期完成此計畫，並且在結構矩陣，線性代數理論等方面有了更深入的了解。

在這幾個月學到的很多，包括：研究方法、文獻蒐集、研究態度、訓練閱讀文獻以及結案報告撰寫等等，這些經歷都是在大學時期從來沒有接觸過的。並且在執行計畫的這段時間，學生除了大專生計畫的執行外，也分別探討過在邊界元素法中影響係數矩陣於退化邊界與退化尺度而引致的矩陣秩降問題，並且也有將相關結果撰寫成文章分別參加中國機械工程學會第37屆學術研討會和第44屆力學會議學生論文競賽獲得第二名，以及投稿至**Journal of Mechanics**並被接受刊登。從申請計畫案後到現在這一年的時間，感受自己有所成長，體會到什麼是真正的研究，而甚麼又是研究的樂趣，這都是在課堂上所學不到的。若沒有老師們與力學聲響振動實驗室的幫助，我也沒有機會參與科技部的大專生計畫。老師的指導，我所甚感動，萬言無法充分表達心中感謝。

(八). 參考文獻

- [1] T. W. Lin, H. T. Shiau, J. T. Huang, “Decomposition of singular large sparse matrix by adding dummy links and dummy degrees,” *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, vol.15, pp.723-727, 1992.
- [2] J. T. Chen, K. S. Chou, C. C. Hsieh, “Derivation of stiffness and flexibility for rods and beams by using dual integral equations,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.32, pp.108-121, 2008.
- [3] C. A. Felippa, K. C. Park, M. R. Justino Filho, “The construction of free-free flexibility matrices as generalized stiffness inverses,” *Computers and Structures*, vol.68, pp.411-418, 1998.
- [4] A. Blazquez, V. Mantic, F. Paris, and J Canas, “On the removal of rigid body motions in the solution of elastostatic problems by direct bem,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.36, pp.4021-4038, 1996.
- [5] R. Vodicka, V. Mantic, and F. Paris, “Note on the removal of rigid body motions in the solution of elastostatic traction boundary value problems by sgbem,” *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol.30, pp.790-798, 2006.
- [6] R. Vodicka, V. Mantic, and F. Paris, “On the removal of the non-uniqueness in the solution of elastostatic problems by symmetric galerkin bem,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.66, pp.1884-1912, 2006.
- [7] E. Lutz, W. Ye, S. Mukherjee, “Elimination of rigid body modes from discretized boundary integral equations,” *International Journal of Solids and Structures*, vol.35 (33), pp.4427-4436, 1998.

- [8] C. A. Felippa, K. C. Park, “The construction of free-free flexibility matrices for multilevel structural analysis,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.191, pp.2139-2168, 2002.
- [9] J. T. Chen, W. S. Huang, J. W. Lee, Y. C. Tu, “A self-regularized approach for deriving the free-free flexibility and stiffness matrices,” *Computers and Structures*, vol.145, pp. 12-22, 2014.
- [10] J. T. Chen, Y. L. Chang, S. Y. Leu, J. W. Lee, “Static analysis of the free-free trusses by using a self-regularization approach,” *Journal of Mechanics*, vol.34, no.4, 2017.
- [11] Adi Ben-Israel, Thomas NE. Greville, *Generalized inverses: theory and applications*, New York: springer, 2003.
- [12] R. Penrose, “A generalized inverse for matrices,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol.62, pp.673-677, 1966.
- [13] R. E. Hartwig, “Singular value decomposition and the Moore-Penrose inverse of bordered matrices”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol.31, pp.31-41, 1976.
- [14] J. T. Chen, C. F. Lee, S. Y. Lin, “A new point of view for the polar decomposition using singular value decomposition,” *International journal of computational and numerical analysis and applications*, vol.2, pp.257-264, 2002.
- [15] J. T. Chen, I. L. Chen and K. H. Chen, “Treatment of rank deficiency in acoustics using svd,” *Journal of Computational Acoustics*, vol.14, pp.157-183, 2006.
- [16] 郭文彬與魏木生, 奇異值分解及其在廣義逆理論中的應用, 科學出版社, 2008.
- [17] 林聰悟與林佳慧, 數值方法與程式, 圖文技術服務有限公司, 1997.
- [18] G. Strang, *Introduction to linear algebra* 5th edition, Wellesley, Wellesley Cambridge Press, 2016.